අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2017

10 - සංයුක්ත ගණිතය

Marking Scheme

Curriculum
Assessment
&
Evaluation
Teaching
Learning
N E T S

පර්යේෂණ හා සංවර්ධන ශාඛාව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව,
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව.

2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r+1) = n(n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා L.H.S. = 1. (3 + 1) = 4 හා R.H.S. = 1. (1 + 1)^2 = 4 5

$\therefore$ ප්‍රතිඵලය $n = 1$ සඳහා සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන ප්‍රතිඵලය $n = p$ සඳහා සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරන්න.

i.e. $\sum_{r=1}^{p} r(3r+1) = p(p+1)^2$. --------------(1) 5

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r(3r+1) = \sum_{r=1}^{p} r(3r+1) + (p+1)(3p+4)$ 5

$= p(p+1)^2 + (p+1)(3p+4)$

$= (p+1)(p^2 + p + 3p + 4)$

$= (p+1)(p+2)^2$. 5

එනයින් $n = 1$ ට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = p + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වෙයි. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බැව් ඉහත පෙන්වා ඇත. එම නිසා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

$\boxed{25}$

---

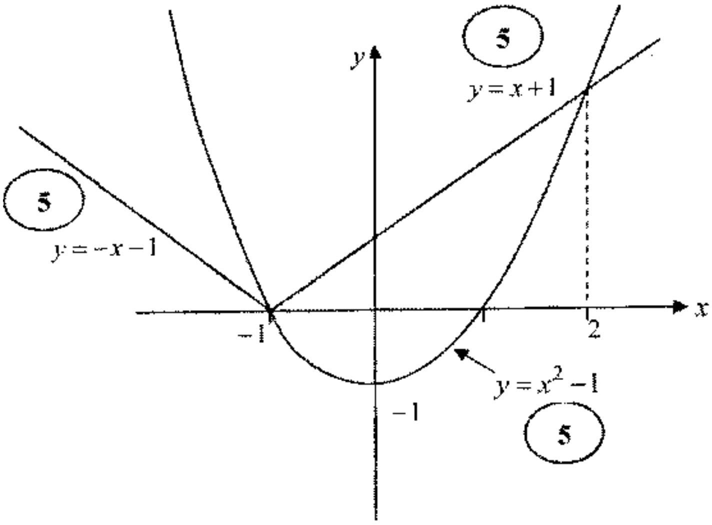
1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 98% ක් පමණි. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය නිසියාකාරව යෙදීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 61% කි. $n = p;\ p \in \mathbb{Z}^+$ ට උපකල්පනයේදී $\sum_{r=1}^{p} r(3r+1) = p(p+1)^2$ ලෙස ලිවිය යුතු වුවත් $\sum_{r=1}^{p} p(3p+1) = p(p+1)^2$ වැනි වැරදි ආකාරයට ලියා තිබීම නිසා අපේක්ෂකයන් සුළු ප්‍රමාණයකට එම පියවර සඳහා ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. එලෙසම $n = p + 1$ සඳහා වූ සාධනය ද නිවැරදි නොවීය.

ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයේ පියවර තහවුරු වන පරිදි අභ්‍යාසවලට යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගැනීමට සිසුන් උනන්දු කරවිය යුතුය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. $x^2 - 1 \ge |x+1|$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂවලදී $x \ge -1$ සහ $x^2 - 1 = x + 1$ විය යුතුයි. එම නිසා $x = -1$ හා $x = 2$ වේ. 5

$x \le -1$ සහ $x \ge 2$ වන x තෘප්ත වන අගයන් විසඳුම් ලෙස ලැබේ. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{නම් } x \ge -1 \\ -(x+1) & \text{නම් } x < -1 \end{cases}$$

(i) අවස්ථාව $x \ge -1$

මෙහිදී, $x^2 - 1 \ge |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \ge x + 1$ 5

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \le -1$ හෝ $x \ge 2$. 5

$x \ge -1$ නිසා, $x = -1$ හෝ $x \ge 2$ විසඳුම් වේ.

(ii) අවස්ථාව $x < -1$,

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -(x+1)$ 5

$\Leftrightarrow x^2 + x \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -1$ හෝ $x \geq 0$. 5

$x < -1$ නිසා, $x < -1$ විසඳුම් වේ.

අවස්ථා දෙකෙන් $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් ලෙස ලැබේ. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

(i) අවස්ථාව $x > -1$,

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq +(x+1)$ 5

$\Leftrightarrow x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$. 5

$x > -1$ නිසා, $x \geq 2$ විසඳුම් වේ.

(ii) අවස්ථාව $x \leq -1$,

$x^2 - 1 \geq |x+1| \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -(x+1)$ 5

$\Leftrightarrow x \leq -1$ හෝ $x \geq 0$. 5

$x \leq -1$ නිසා, $x \leq -1$ විසඳුම් වේ.

අවස්ථා දෙකෙන් $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් ලෙස ලැබේ. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක් 3

(i) අවස්ථාව $x^2 \geq 1$

මෙහිදී, $x^2 - 1 \geq 0$, හා පැති දෙකම ධන අගයක් ගනී.

$\therefore x^2 - 1 \geq |x+1|$

$\Leftrightarrow (x^2 - 1) \geq (x+1)^2$ 5

$\Leftrightarrow (x+1)^2 \; (x-1)^2 - (x+1)^2 \geq 0.$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \ [(x-1)^2 - 1] \geq 0.$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \ x\,(x-2) \geq 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad x = -1$ හෝ $x \leq 0$ හෝ $x \geq 2$ 5

$x^2 \geq 1$ නිසා $\Leftrightarrow x \leq 1$ හෝ $x \geq 1$ වේ. $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ විසඳුම් වේ. 5

(ii) අවස්ථාව $x^2 < 1$

$x^2 - 1 < 0,$ නිසා පිළිතුරක් නොමැත. අවස්ථා දෙකෙන්ම $x \leq -1$ හෝ $x \geq 2$ ලෙස ලැබේ. 5

25

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

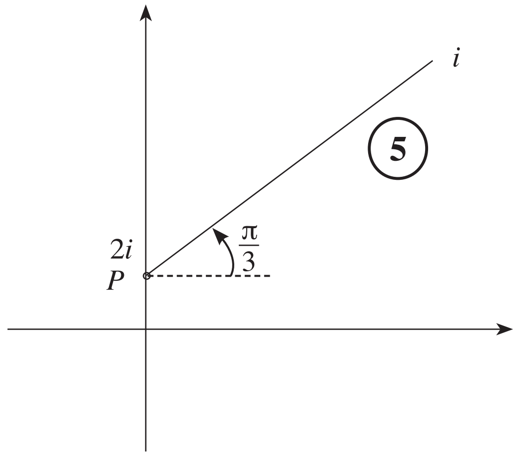
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 95%ක් පමණි. එහි පහසුතාව 45%ක් පමණි. ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයෙන් පිළිතුරු සැපයීම වඩාත් සාර්ථක වී තිබුණු අතර හුදෙක් වීජීය ක්‍රම භාවිත කිරීමෙන් සාර්ථකව පිළිතුරු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි.

මාපාංක පිළිබඳ අසමානතා නිවැරදිව තහවුරු වන ආකාරයේ ගැටලු වීජීය ක්‍රම භාවිතයෙන් විසඳීමට සිසුන් නිරත කරවීමෙන් වඩාත් සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීමට යොමු කළ හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\operatorname{Arg}(z - 2i) = \frac{\pi}{3}$ යන්න සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථය වන l හි දළ සටහනක් අඳින්න.

P හා Q යනු ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි පිළිවෙළින් $2i$ හා $\sqrt{3} + 5i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. PQ දුර සොයා Q ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.



$$(\sqrt{3} + 5i) - 2i = \sqrt{3} + 3i$$

$$= 2\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad 5$$

$$= 2\sqrt{3}\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\} \quad 5$$

$$\therefore \ PQ = 2\sqrt{3} \quad 5$$

තවද, $\operatorname{Arg}\left((\sqrt{3} + 5i) - 2i\right) = \frac{\pi}{3}$ හා එනයින් Q, l මත පිහිටයි

5

25

---

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් උත්සාහ කර ඇත්තේ 83%ක් වන අතර පහසුතාව 21%ක් පමණි.

රේඛාවක ආනතිය සහ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රධාන විස්තාරය පිළිබඳව නිසි අවබෝධයක් නොමැති කම නිසා නිවැරදිව පිළිතුරු සැපයීමට නොහැකි වී තිබුණි.

විස්තාරය, මාපාංකය ඇතුළත් සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. **INFINITY යන වචනයෙහි අකුරු අට, වෙනස් ආකාර කීයකට පේළියක පිළියෙල කළ හැකි ද?**
මෙම පිළියෙල කිරීම්වලින් කොපමණක

(i) I අකුරු තුන ම එක ළඟ තිබේ ද?

(ii) හරියටම එක I අකුරක් හා N අකුරු දෙක ම මුල් අකුරු තුන ලෙස තිබේ ද?

I	N	F	T	Y
3	2	1	1	1

$$\frac{8!}{3!\,2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2} \quad 5$$

$$= 3360. \quad 5$$

(i) $\frac{6!}{2!} = 360.$ 5

(ii)

I	F	T	Y
2	1	1	1

N	N	I					
N	I	N					
I	N	N					

5

$$\frac{5!}{2!} \times 3 = 5 \times 4 \times 3 \times 3$$

$$= 180. \quad 5$$

25

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = 3\alpha^2 \cos^2 \alpha$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)\cos x \cos \alpha \cdot (x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha} \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \underbrace{\frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}}_{5} \cdot \cos x \cos \alpha \cdot (x^2 + \alpha x + \alpha^2) \quad 5$$

$$= 1 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (3\alpha^2)$$

$$= 3\alpha^2 \cos^2 \alpha . \quad 5$$

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් 1

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{x^3 - \alpha^3}{\tan x - \tan \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{\tan(x-\alpha)(1 + \tan x \tan \alpha)} \quad 5 \qquad \left(\because \tan(x-\alpha) = \frac{\tan x - \tan \alpha}{1 + \tan x \tan \alpha} \right)$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \frac{x-\alpha}{\tan(x-\alpha)} \cdot \frac{x^2 + \alpha x + \alpha^2}{(1 + \tan x \tan \alpha)} \quad 5$$

$$= \lim_{x \to \alpha} \underbrace{\frac{x-\alpha}{\sin(x-\alpha)}}_{5} \cdot \frac{\cos(x-\alpha) \cdot (x^2 + \alpha x + \alpha^2)}{(1 + \tan x \tan \alpha)}$$

$$= 1 \cdot \frac{1 \cdot 3\alpha^2}{1 + \tan^2 \alpha} \quad 5$$

$$= \frac{3\alpha^2}{\sec^2 \alpha} = 3\alpha^2 \cos^2 \alpha . \quad 5$$

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් 2

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{\tan x-\tan\alpha} = \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{x-\alpha}{\frac{\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha}{\cos x\cos\alpha}} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}\cdot\frac{(x-\alpha)}{\sin(x-\alpha)}\cdot\cos x\cos\alpha \quad 5$$

$$= 3\alpha^2\cdot 1\cdot\cos^2\alpha$$

5

$$= 3\alpha^2\cos^2\alpha. \quad 5$$

$\boxed{25}$

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 90%ක් පමණි. ශ්‍රිතයක සීමාව සෙවීමට අදාළව මෙම ගැටලුව ඉදිරිපත් කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 41%ක් පමණි.

ශ්‍රිතයේ සීමාව සෙවීමට හැකිවන ආකාරයට පරිවර්තනය කර ගැනීමේදී සාධක පිළිබඳ දැනුමේ මඳකම ද, ප්‍රමේයයන් නිවැරදිව යෙදිය හැකි ආකාරයට සකසා ගැනීමේ දුර්වලතා ද දක්නට ලැබුණි.

මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගැනීම සඳහා සාධක පිළිබඳ දැනුම මෙන්ම ප්‍රමේයයන් භාවිත වන ආකාරය අනුව ව්‍යූහගත වූ ගැටලු විසඳීමට යොමු කරවීම ඉතාම වැදගත් වේ.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $0 < a < b$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{b}}\cos x\right) = -\dfrac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx$ සොයන්න.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(b-a)}{b}\cos^2 x}} \times \sqrt{\frac{b-a}{b}} \times (-\sin x) \quad 5 + 5$$

$$= -\frac{\sin x}{\sqrt{b - b\cos^2 x + a\cos^2 x}} \times \sqrt{b-a} \quad 5$$

$$= -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}$$

$$\therefore \int -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + \text{නියතය} \quad 5$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{b-a}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right) + C,$$ මෙහි C යනු අභිමත

නියතයකි. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$y = \sin^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{b}}\cos x\right)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\sin y = \sqrt{\dfrac{b-a}{b}}\cos x$ and $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$\cos y\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b-a}{b}}(-\sin x) \text{ ------------- (1)} \quad 5$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{1-\frac{b-a}{b}\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\frac{b(1-\cos^2 x)+a\cos^2 x}{b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}}{\sqrt{b}} \qquad 5$$

$$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x + b\sin^2 x}} \qquad 5$$

පෙර මෙන් අනුකලනය 10

$\boxed{25}$

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88%ක් වන අතර පහසුතා දර්ශකය 38%ක් පමණි.

ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක අවකලනය සහ දාම නීතිය පිළිබඳ දැනුම අවම මට්ටමක පැවතුණි. ව්‍යුත්පන්නය නිවැරදිව ලබා ගත් නමුත් අනුකලනය සඳහා ශ්‍රිතය දී ඇති ආකාරයට ලබා ගැනීමට අපහසුවීම නිසා පිළිතුර සාර්ථකව ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

මේ ආකාරයේ මූලධර්ම අවබෝධ වන පරිදි ගැටලු විසඳීමෙන් සාර්ථක ප්‍රතිඵල ලබා ගත හැක.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. C වක්‍රයක්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලැබේ. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\cot^3\theta$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ රේඛාවේ අනුක්‍රමණය -1 වන පරිදි C වක්‍රය මත වූ P ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

$x = 3\cos\theta - \cos^3\theta \qquad y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta; \quad \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$

5 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{-3\sin\theta(1-\cos^2\theta)} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = -\cot^3\theta. \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow \cot\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$P \equiv \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \equiv \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right).$$

5

$\boxed{25}$

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 53%ක් පමණි.

බොහෝ අපේක්ෂකයන් ගැටලුවේ මුල් කොටසට සාර්ථකව පිළිතුරු සපයා තිබුණත් අවසාන කොටසේදී අනුක්‍රමණය -1 ආදේශයෙන් θ පරාමිතියේ අගය ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සරල ගැටලු විසඳීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මගහරවා ගතහැක.

8 වන ප්‍රශ්නය

8. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $3x - 4y = 2$ හා $4x - 3y = 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

(i) l_1 හා l_2 අතර කෝණවල සමච්ඡේදකයන්හි සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ii) l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$\frac{3x-4y-2}{5} = \pm\frac{4x-3y-1}{5}$ මගින් දෙනු ලැබේ. 5

$x+y+1=0$ හෝ $7x-7y-3=0$ 5

l_1 හා $x+y+1=0$ අතර සුළු කෝණය α ලෙස ගන්න.

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}}\right|$$ 5

$$= 7 > 1.$$ 5

$\therefore 7x-7y-3=0$ යනු l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමීකරණය වේ. 5

25

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 87%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 37%ක් පමණි. කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ ලබා ගැනීමේදී + හෝ − ලකුණු දෙකම භාවිත කර නොතිබීම නිසා සමීකරණ 2ක් ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. සමීකරණ නිවැරදිව ලබා ගත් නමුත් රේඛා දෙකක් අතර සුළු කෝණය සෙවීමේදී $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ සූත්‍රය නිවැරදිව භාවිත කර නොමැති වීමෙන් සාර්ථක පිළිතුරකට ළඟා වීමට නොහැකි වී තිබුණි.

සරල ගැටලු විසඳීමෙන් මේ පිළිබඳ නිසි අවබෝධයක් ලබාගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. S යනු $x^2 + y^2 - 4 = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය යැයි ද l යනු $y = x + 1$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ද ගනිමු. S හා l හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නා වූ ද S වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

$(x^2+y^2-4)+\lambda(y-x-1)=0$, ආකාර වේ. ; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$.

10

$x^2+y^2-\lambda x+\lambda y-\lambda-4=0$.

මෙය S ට ප්‍රලම්භ නම්, $g=0; f=0; c=-4; g'=-\frac{\lambda}{2}; f'=\frac{\lambda}{2}; c'=-\lambda-4$, සමගින්

$2gg'+2ff'=c+c'$ විය යුතුයි. 5

එනම් $0=-\lambda-8$

$\therefore \lambda=-8$. 5

$\therefore$ පිළිතුර $x^2+y^2+8x-8y+4=0$. 5

$\boxed{25}$

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 84%ක් වන අතර පහසුතාව 33%ක් පමණි.

වෘත්තයක හා සරල රේඛාවක ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $s + \lambda l = 0$ ආකාරයට ප්‍රකාශ නොකර වෙනස් ආකාරවලට වෘත්තයේ සමීකරණය සෙවීමට උත්සාහ දරා තිබුණි. $2gg' + 2ff' = c + c'$ සමීකරණය නිවැරදිව භාවිත කිරීමට නොහැකි වීමෙන් ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි. වෘත්ත පිළිබඳ සරල ගැටලු විසඳීමෙන් මෙම දුර්වලතා මග හරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $-\pi < \theta \leq \pi$ සඳහා $\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 + \sin\theta$ බව පෙන්වන්න. **ඒ නයින්,** $\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ හි අගය ද සොයන්න. $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}$$

5

$$= 1 + \sin\theta \quad \left(\because \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 \text{ and } 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sin\theta.\right)$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$: යැයි ගනිමු. 5

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}$.

$\therefore \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ------------ (1) 5 $\left(\because \sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} > 0\right)$

$\theta = \frac{-\pi}{6}$: යැයි ගනිමු.

එවිට $\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

$\therefore \cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ------------ (2) $\left(\because \sin\frac{\pi}{12} < \cos\frac{\pi}{12}\right)$ 5

$(1) - (2) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. 5

$\boxed{25}$

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 88%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 55%ක් පමණි.

මෙම ගැටලුවේ මුල් කොටසට සාර්ථකව පිළිතුරු සපයා තිබුණත් $\cos\frac{\pi}{12}, \sin\frac{\pi}{12} > 0$ බව අවබෝධ කර නොගැනීම නිසා නිසි පිළිතුර ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි. එලෙස $\theta = -\frac{\pi}{6}$ සඳහා $\cos\frac{\pi}{12} > \sin\frac{\pi}{12}$ හඳුනා නොගැනීමෙන් $\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$ ට අදාළ අගය ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි.

වෘත්ත පාද වලදී කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවල ලකුණු සම්බන්ධ වන සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් තිබෙන බව දී ඇත. $a^2 > 3b$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ ද b ඇසුරෙන් $\alpha\beta$ ද ලියා දක්වන්න.

$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$ බව පෙන්වන්න.

$|\alpha + \beta|$ හා $|\alpha - \beta|$ ස්වකීය මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$9x^2 - 6\left(|a| + \sqrt{a^2 - 3b}\right)x + 4\sqrt{a^4 - 3a^2b} = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*b*) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ වේ. $(x-1)(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $3x+2$ වේ. $(x-1)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා $(x+2)$ මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -4 බව පෙන්වන්න.

p හා q හි අගයන් සොයා $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

5

(*a*) විවේචකය $\Delta = (2a)^2 - 4(3)(b)$

$= 4(a)^2 - 4 \cdot 3b$ 5

$f(x) = 0$ ට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති නිසා, $\Delta > 0$ විය යුතුයි. 5

$\therefore\ a^2 > 3b$ 5

20

$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3}$ හා $\alpha\beta = \frac{b}{3}$

5 5

10

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 10

$= \frac{4a^2}{9} - \frac{4b}{3}$ 5

$= \frac{4}{9}(a^2 - 3b)$ 5

$\therefore (\alpha - \beta) = \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}$ 5

25

$\alpha' = |\alpha + \beta|$ හා $\beta' = |\alpha - \beta|$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha' = \frac{2}{3}|\alpha|$ හා $\beta' = \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}$

5

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x - \alpha')(x - \beta') = 0$ වේ. 5

i.e. $x^2 - (\alpha' + \beta')x + \alpha'\beta' = 0$ 5

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{2}{3}|a| + \frac{2}{3}\sqrt{(a^2 - 3b)}\right)x + \frac{4}{9}|a|\sqrt{(a^2 - 3b)} = 0$

5 5

$\Rightarrow 9x^2 - 6\left(|a|\sqrt{(a^2 - 3b)}\right)x + 4\sqrt{(a^4 - 3a^2b)} = 0$ 5

30

(b) $g(x)$ යන්න $(x-1)(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $3x + 2$ වන නිසා,

$g(x) = h(x)(x-1)(x+2) + 3x + 2,$ - - - - - - - - - (1) 10

මෙහි $h(x)$ මාත්‍රය 1 වන බහුපදයකි.

ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(1)$ වේ. 5

$(1) \Rightarrow g(1) = 5$ 5

එනයින් $g(x)$ යන්න $(x-1)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය 5 වේ.

නැවතත්, ශේෂ ප්‍රමේයය මගින් $g(x)$ යන්න $(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $g(-2)$ වේ.

5

$(1) \Rightarrow g(-2) = -4$ 5

එනයින්, $g(x)$ යන්න $(x+2)$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය -4 වේ.

30

$g(1) = 5 \Rightarrow 1 + p + q + 1 = 5$ 5

$p + q = 3$

$g(-2) = -4 \Rightarrow -8 + 4p - 2q + 1 = -4$ 5

$4p - 2q = 3$

$p = \frac{3}{2}$ හා $q = \frac{3}{2}$

5 5 **20**

---

5 5

දැන් $g(-1) = -1 + p - q + 1 = 0. \quad (\because \; p = q)$

එම නිසා සාධක ප්‍රමේයය මගින්, $(x+1)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් වේ. 5 **15**

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) x හි ආරෝහණ බල වලින් $(5+2x)^{14}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.
$r = 0, 1, 2, \ldots, 14$ සඳහා ඉහත ප්‍රසාරණයේ x^r අඩංගු පදය T_r යැයි ගනිමු.

$x \neq 0$ සඳහා $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{2(14-r)}{5(r+1)}x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $x = \dfrac{4}{3}$ වන විට, ඉහත ප්‍රසාරණයෙහි විශාලතම පදය ලබාදෙන r හි අගය සොයන්න.

(*b*) $c \geq 0$ යැයි ගනිමු. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \dfrac{1}{(r+c)} - \dfrac{1}{(r+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{(n+c+1)} - \frac{1}{(n+c+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

c සඳහා සුදුසු අගයන් සහිත ව මෙම ඓක්‍යය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\displaystyle (5+2x)^{14} = \sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r 5^{14-r}(2x)^r$ 10

$$= \sum_{r=0}^{14} {}^{14}C_r 5^{14-r} \cdot 2^r \cdot x^r \text{, මෙහි } r = 0, 1, \ldots, 14 \text{ සඳහා } {}^{14}C_r = \frac{14!}{r!(14-r)!}$$

5

15

$r = 0, 1, \ldots, 14$ සඳහා $T_r = {}^{14}C_r 5^{14-r} \cdot 2^r \cdot x^r$ යැයි ගන්න.

එවිට $\displaystyle\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{14!\ 5^{13-r}\ 2^{r+1}}{(r+1)!(13-r)!}x^{r+1} \Big/ \frac{14!\ 5^{14-r}\ 2^r}{r!(14-r)!}x^r$ 5

10

$$= \frac{2(14-r)}{5(r+1)}x$$ 5

20

$x = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2}{5}\frac{(14-r)}{(r+1)} \cdot \frac{4}{3}$ 5

$\frac{8}{15}\frac{(14-r)}{(r+1)} \underset{<}{\geq} 1$ වන විට $\frac{T_{r+1}}{T_r} \underset{<}{\geq} 1$ ලෙස වේ.
5 5

එවිට $112 - 8r \underset{<}{\geq} 15r + 15.$

එවිට $r \underset{>}{\leq} \frac{97}{23} = 4\frac{5}{23}.$ 5

$T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 > T_6 \cdots > T_{14}$ 10

එම නිසා අවශ්‍ය අගය $r = 5$ 5

35

(b) $\frac{1}{r+c} - \frac{1}{r+c+2} = \frac{(r+c+2)-(r+c)}{(r+c)(r+c+2)}$ 5

$= \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}.$ 5

10

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $u_r = \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ යැයි ගනිමු.

එවිට

$r = 1: \quad u_1 = \frac{1}{1+c} - \frac{1}{3+c}$ 5

$r = 2; \quad u_2 = \frac{1}{2+c} - \frac{1}{4+c}$

5

$r = 3; \quad u_3 = \frac{1}{3+c} - \frac{1}{5+c}$

$\vdots$

$r = n-2; \; u_{n-2} = \frac{1}{n-2+c} - \frac{1}{n+c}$ 5

$r = n-1; \quad u_{n-1} = \frac{1}{n-1+c} - \frac{1}{n+c+1}$ 5

$r = n; \quad u_n = \frac{1}{n+c} - \frac{1}{n+c+2}$

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \frac{1}{1+c} + \frac{1}{2+c} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2} \quad 10$$

$$= \frac{3+2c}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2}. \quad 5$$

$\boxed{35}$

දැ.අ.පැ. සීමාව $n \to \infty$ $\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}$. වේ. 10

$\therefore$ $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අභිසාරී වේ හා ඓක්‍යය $\frac{3+2c}{(1+c)(2+c)}$. වේ.

5 5

$\boxed{20}$

$c = 0$: දැමීමෙන්, $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{3}{4}$. -------------------(1) 5

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{5}{12}. \quad 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)} = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4} \text{ -------------------(2)}$$

දැන්, (1) හා (2) $\Rightarrow$ $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$. 5

$\boxed{15}$

---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ බව දී ඇත; මෙහි $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{B}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ. $a = 1$ හා $b = -1$ බව පෙන්වා, a හා b සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ සොයන්න.

$\mathbf{P}^{-1}$ ලියා දක්වා, එය භාවිතයෙන්, $\mathbf{PQ} = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{Q}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසයයි.

(*b*) ආගන්ඩ් සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථය වූ C හි දළ සටහනක් අඳින්න.

$z_0 = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ. $\dfrac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙළින් z_0, $\dfrac{1}{z_0}$, $z_0 + \dfrac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත ආගන්ඩ් සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු.

P ලක්ෂ්‍යය ඉහත C මත පිහිටන විට

(i) Q හා S ලක්ෂ්‍ය ද C මත පිහිටන බවත්

(ii) R ලක්ෂ්‍යය තාත්ත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත්

පෙන්වන්න.

(*a*)

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$= \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix} \quad 10$$

$$AB^T = P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-a+3a & 2+ab \\ -1-b+2a & -1+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 2+2a=4, \quad 2+ab=1, \quad -1+2a-b=2, \quad -1+b^2=0. \quad 10$$

$$\Leftrightarrow \quad a=1, \quad b=-1. \quad 5$$

දැන්, $B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 5

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$ 5

45

$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$ 10

තවද, $PQ = P^2 + 2I \Leftrightarrow P^{-1}(PQ) = P^{-1}(P^2 + 2I)$ 5

$\Leftrightarrow Q = P^{-1}P^2 + P^{-1}(2I)$ 5

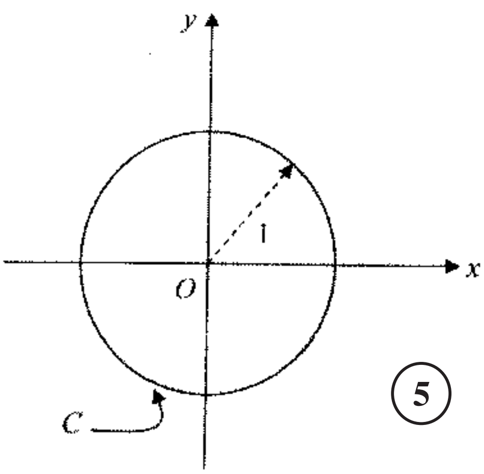
$\Leftrightarrow Q = P + 2P^{-1}$ 5

$\Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ 5

$\therefore Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$ 5

35

(*b*)



5

05

පළමුව, $\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{1}{a(\cos\theta+i\sin\theta)}\cdot\dfrac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta-i\sin\theta)}$ 5

$$=\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{a}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$ 5

එනයින්, $\left|\dfrac{1}{z_0}\right|=\dfrac{1}{a},$ සහ $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{1}{z_0}\right)=-\theta.$

5 5

ඊළඟට, $z_0{}^2=a^2(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=a^2\left\{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2i\cos\theta\sin\theta\right\}$$ 5

$$=a^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$ 5

එනයින්, $|z_0{}^2|=a^2,$ සහ $\mathrm{Arg}\left(z_0{}^2\right)=2\theta.$ 5

5

40

P, C මත පිහිටයි යැයි සිතමු.

එවිට $a = 1$ 5

$\therefore \left|\dfrac{1}{z_0}\right|=1$ හා Q යන්න C මත පිහිටයි. 5

තවද, $|z_0^2|=1$ හා එනයින් S යන්න C මත පිහිටයි. 5

15

$$z_0+\frac{1}{z_0}=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=2\cos\theta.$$ 5

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<2\cos\theta<2.$

$z_0+\dfrac{1}{z_0}$ මගින් නිරූපනය කරන සංඛ්‍යාව තාත්වික වන අතර තාත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටයි. 5

10

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (a) $x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

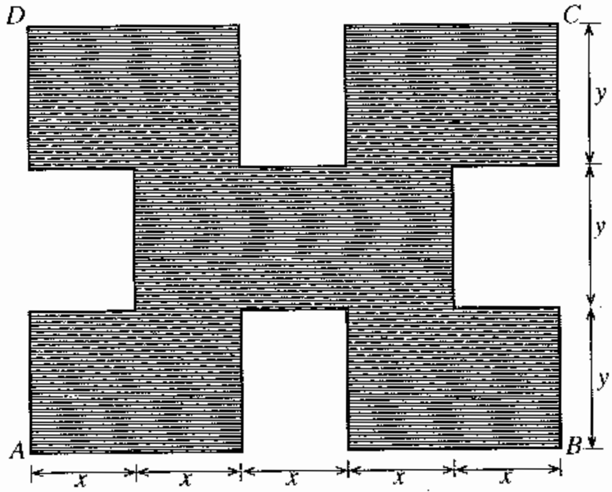
$x \neq 1, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \dfrac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ අසමානතාව විසඳන්න.

(b) යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය 385 m^2 වේ. මෙම පෙදෙස ලබාගෙන ඇත්තේ දිග මීටර $5x$ ද පළල මීටර $3y$ ද වූ $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග මීටර y ද පළල මීටර x ද වූ සර්වසම සෘජුකෝණාස්‍ර හතරක් ඉවත් කිරීමෙනි. $y = \dfrac{35}{x}$ බව පෙන්වා, අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි මීටරවලින් මනින ලද පරිමිතිය P යන්න $x > 0$ සඳහා $P = 14x + \dfrac{350}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

P අවම වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq 1, 2.$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

එවිට $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)2x - x^2(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ 10

$= \dfrac{-6x^2 + 4x + 3x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$ 5

$= \dfrac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ ($x \neq 1, 2.$ සඳහා) 5

$\boxed{20}$

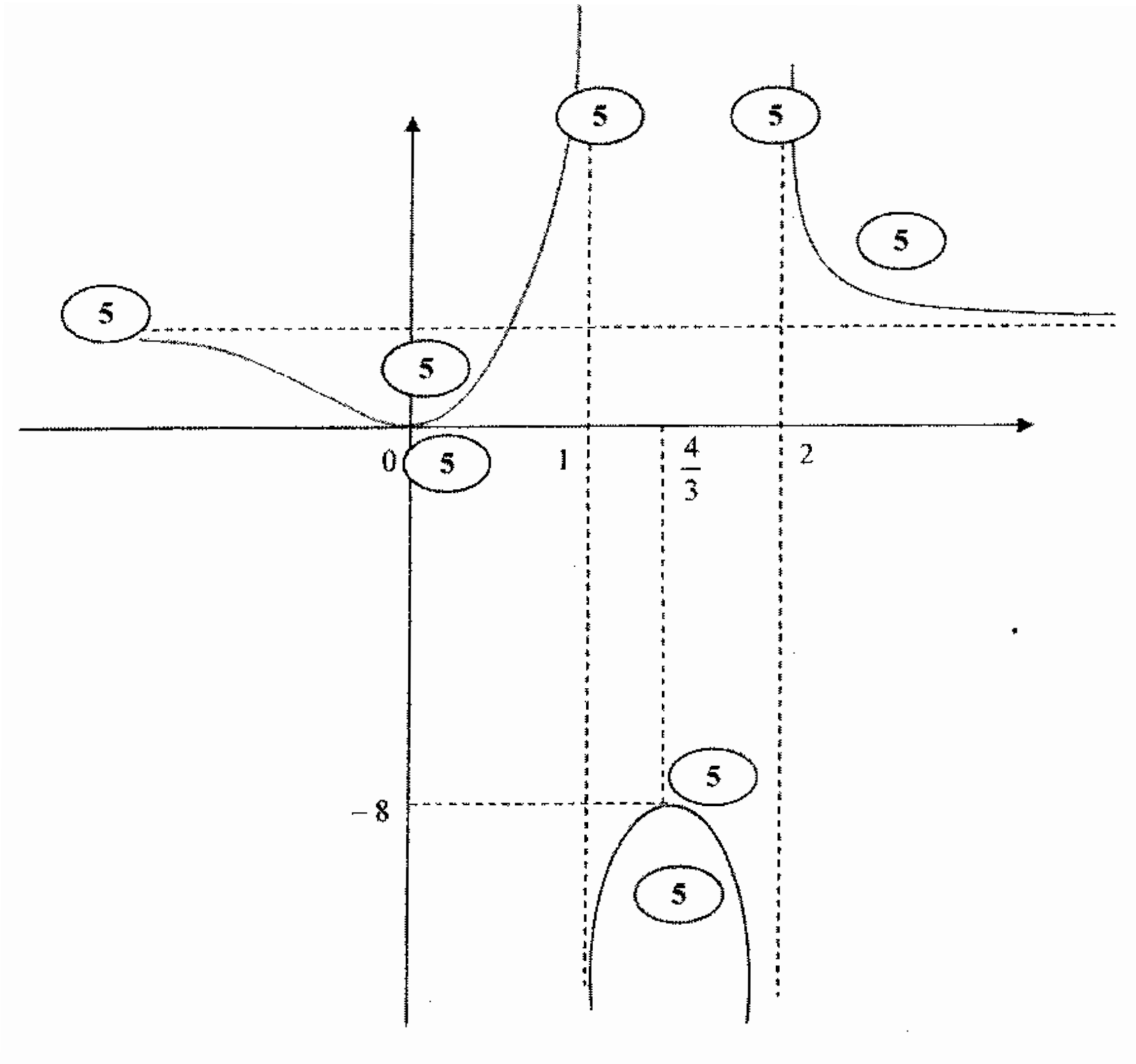
තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$ එනයින් එය $y = 1$ වේ.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \infty$ හා $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = -\infty$ හා $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \infty.$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x = 1, 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = \dfrac{4}{3}.$ 5

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
	5	5	5	5	5



හැරුම් ලක්ෂ දෙකක් පවතී : $(0,0)$ ස්ථානීය අවමයක් $\left(\frac{4}{3}, -8\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්

5 $x = 0$ හෝ $2 < x < 2$ 5

$\boxed{80}$

(b) වර්ගඵලය : $(5x)(3y) - 4xy = 385$ 5

$11xy = 385$

$xy = 35$

$y = \frac{35}{x}$. 5

පරිධිය : $P = 2(5x+3y) + 4x + 4y$ 5

$= 14x + 10y$

$= 14x + \frac{350}{x}$; $x > 0$. 5

$\frac{dP}{dx} = 14 - \frac{350}{x^2}$ 5

$\frac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{350}{14} = 25$

5

$\therefore x = 5$ 5

$0 < x < 5$ සඳහා $\frac{dP}{dx} < 0$ හා $5 < x$ සඳහා $\frac{dP}{dx} > 0$ වේ.

5 5

$x = 5$ වන විට P අවමයක් වේ. 5

50

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) (i) $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, **ඒ නයින්**, $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\,dx$ සොයා, **ඒ නයින්**, $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛාවලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(*b*) $c > 0$ හා $I = \displaystyle\int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්,

$I = \dfrac{\pi}{4c}\ln c + \dfrac{1}{c}J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\,d\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \dfrac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(i) $$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$ **10**

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$x^0 : 1 = A$

$x^1 : 0 = 2A+B+C$ **10**

$x^2 : 0 = A+B$

$\therefore\ A = 1, B = -1$ සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $C = -1$. **10**

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$ **5**

15 $= \ln|x| - \ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1} + C'$, මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි.

50

(ii) $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$ 10

$-xe^{-x} - e^{-x} + C''$, මෙහි C'' යනු අභිමත නියතයකි. 5

5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_1^2 xe^{-x}dx$ 5

$= -(x+1)e^{-x}\Big|_1^2$ 5

$= 2e^{-1} - 3e^{-2}$. 5

35

(b) $x = c\tan\theta$. යැයි ගනිමු.

එවිට $dx = c\sec^2\theta\, d\theta$.

$x = 0$, විට $\theta = 0$ වන අතර $x = c, \theta = \frac{\pi}{4}$ වේ.

5

එවිට $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2 + c^2\tan^2\theta} \cdot c\sec^2\theta\, d\theta$ 5

5

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2\sec^2\theta} \cdot c\sec^2\theta\, d\theta$ 5

$= \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln c + \ln(1+\tan\theta\}d\theta$ 5

$= \frac{1}{c}\ln c\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\{1+\tan\theta\}d\theta$

$= \frac{1}{c}\ln c \cdot \theta\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{c}J$ 5

$= \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}J$. 5

35

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right) d\theta \quad 5$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left\{1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right\} d\theta \quad 5$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{(1+\tan\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln 2 - \ln(1+\tan\theta)\}\, d\theta \quad 5$$

$$= \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} - J$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{8}\ln 2 . \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c}\frac{\pi}{8}\ln 2 \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{8c}\{2\ln c + \ln 2\}$$

$$= \frac{\pi}{8c}\ln(2c^2) . \quad 5$$

30

16 වන ප්‍රශ්නය

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $P \equiv (0,1)$ ලක්ෂ්‍යය $y = mx$ මගින් දෙනු ලබන l සරල රේඛාව මත නොපිහිටන බව පෙන්වන්න.

l ට ලම්බව P හරහා වූ සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(-mt, t+1)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

ඒ නයින්, P සිට l ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය වූ Q ලක්ෂ්‍යයෙහි ඛණ්ඩාංක $\left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

m විචලනය වන විට, Q ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - y = 0$ මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, Q හි පථයේ දළ සටහනක් xy-තලයෙහි අඳින්න.

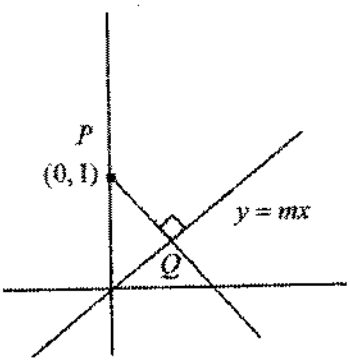
තව ද $R \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ලක්ෂ්‍යය S මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

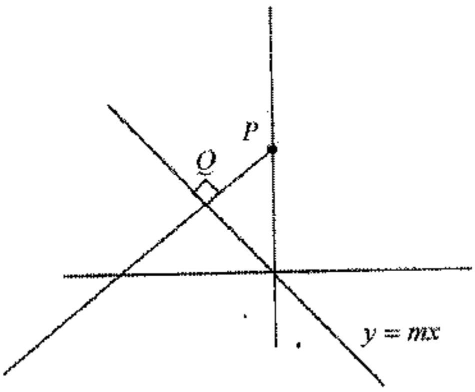
R ලක්ෂ්‍යයේ දී S බාහිරව ස්පර්ශ කරන හා x-අක්ෂය මත කේන්ද්‍රය පිහිටන S' වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

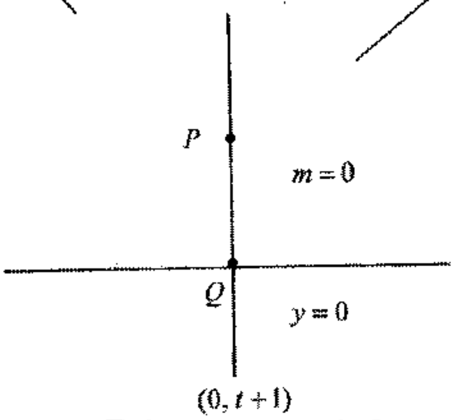
S' හි කේන්ද්‍රයම කේන්ද්‍රය ලෙස ඇතිව S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

$(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යය l මත පිහිටයි නම් එවිට $1 = m \times 0$ ලෙස විය යුතුයි. i.e. $1 = 0$. මෙය විසංවාදයකි. 5 5

$\therefore$ $(0, 1)$ යන්න l මත නොපිහිටයි. $\boxed{10}$







(i) අවස්ථාව : $m \neq 0$

මෙම අවස්ථාවේදී, P හරහා යන l ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය පහත ආකාර වේ.

$y-1=-\frac{1}{m}(x-0)$. 10

මෙම සමීකරණයට t හඳුන්වාදීමෙන් $y-1=-\frac{1}{m}(x-0)=t$ (යැයි කියමු) 5

එවිට $y=t+1$ හා $x=-mt$, මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

5 5

එනයින්, 1 ට ලම්බ P හරහා යන රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක

$(-mt,\ t+1)$, ආකාර ගනියි. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.

(ii) අවස්ථාව : $m = 0$

මෙම අවස්ථාවේදී, P හරහා යන l ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය $y-$ අක්ෂය වන අතර

එනයින් එය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(0,\ t+1)$ ආකාර ගනියි. මෙහි t යනු

පරාමිතියක් එම නිසා සියලු t අගයන් සඳහා මෙම ආකාරය සත්‍ය වේ. 5

30

---

t_0 යනු Q ට අනුරූප අගය t ලෙස ගනිමු.

Q යන්න l, මත පිහිටන නිසා $t_0+1=m(-mt_0)$ 5

5

$\therefore\ t_0=-\frac{1}{1+m^2}$, සහ එනයින් $Q=\left(-m\left(-\frac{1}{1+m^2}\right), -\frac{1}{1+m^2}+1\right)$ 5

$$=\left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right).$$ 5

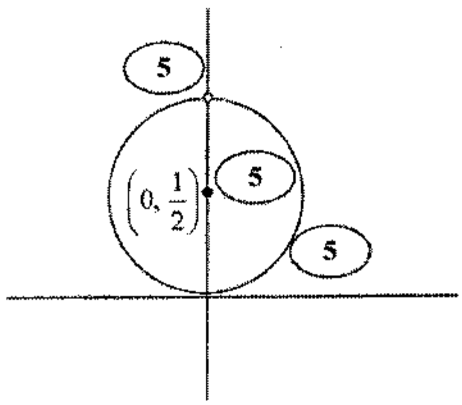
20

$x=\dfrac{m}{1+m^2}$, $y=\dfrac{m^2}{1+m^2}$ යන්න x^2+y^2-y හි ආදේශයෙන් 5

$x^2+y^2-y=\dfrac{m^2}{(1+m^2)^2}+\dfrac{m^4}{(1+m^2)^2}-\dfrac{m^2}{1+m^2}=\dfrac{m^2(1+m^2)}{(1+m^2)^2}-\dfrac{m^2}{1+m^2}=0.$ 5

5

එනයින් Q යන්න S මත පිහිටයි. 5



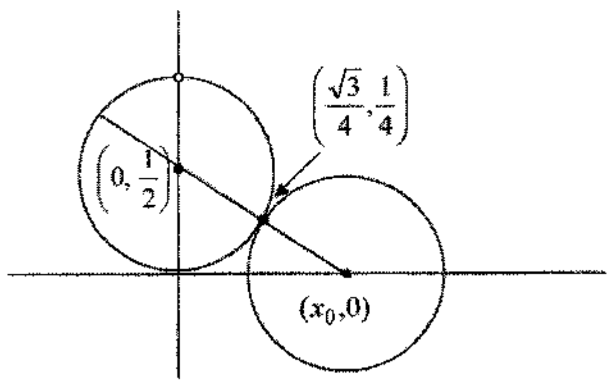
35

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; හා $y=\dfrac{1}{4}$ යන්න x^2+y^2-y හි ආදේශයෙන් 5

$x^2+y^2-y=\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}=0.$ 5

S මත $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ පිහිටයි. 5

15



එවිට x_0 යනු S' හි කේන්ද්‍රයේ

x හි ඛණ්ඩාංක ලෙස ගන්න.

$$\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}}. \quad 5$$

5 5

$$\Rightarrow \quad x_0^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-x_0\right)^2+\frac{1}{16}. \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 5$$

එනයින් S' හි සමීකරණය $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2$. 5

i.e. $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

30

S අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ කරන අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2. \quad 10$$

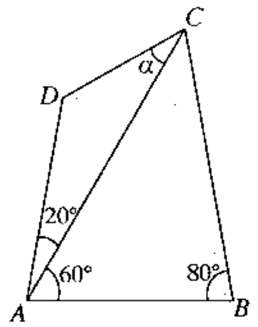
10

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) (i) $0° < \theta < 90°$ සඳහා $\dfrac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = AD$, $A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$ හා $B\hat{A}C = 60°$වේ. $A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\dfrac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ බව පෙන්වන්න.



මීළඟට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin\alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\cot\alpha = \dfrac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = 30°$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සමීකරණය විසඳන්න.

5 5

(a) (i) $\dfrac{2\left\{\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right\} - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}.$ 5

$\boxed{15}$

(ii) සයින් නීතිය භාවිතයෙන් : $\dfrac{AC}{\sin 80°} = \dfrac{AB}{\sin 40°}.$ 10

5

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2\sin 40° \cos 40°}{\sin 40°} = 2\cos 40°$ 5

5

නැවතත් සයින් නීතිය භාවිතයෙන් : $\dfrac{AC}{\sin(\alpha + 20°)} = \dfrac{AD}{\sin\alpha}.$ 10

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ 5

එනයින්, $AB = AD \Rightarrow \dfrac{\sin(20^\circ + \alpha)}{\sin\alpha} = 2\cos 40^\circ.$ 5

5

$\therefore \quad \sin(20^\circ + \alpha) = 2\sin\alpha\cos 40^\circ$

$\Rightarrow \quad \sin 20^\circ \cos\alpha + \cos 20^\circ \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos 40^\circ$ 5

$\Rightarrow \quad \cot\alpha = \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$ 5

60

10

$\theta = 20^\circ \Rightarrow$ සමගින් (i) $\Rightarrow \quad \dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$ 5

$\therefore \cot\alpha = \sqrt{3}$ 5

5

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ.$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ නිසා)

25

(b) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 4x - \sin 2x = \cos 2x - \cos 4x$ 5

$\Leftrightarrow 2\cos 3x \sin x = 2\sin 3x \sin x$

5 5

$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos 3x - \sin 3x) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ හෝ $\cos 3x = \sin 3x$ 5

5

5 5

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ හෝ $\tan 3x = 1 \quad (\because \cos 3x \neq 0)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Leftrightarrow x = n\pi$ හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $3x = m\pi + \dfrac{\pi}{4}$ 5

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Leftrightarrow x = n\pi$ හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = \dfrac{m\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12}$ 5

50

2.2 II පත්‍රය හා පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ තොරතුරු

2.2.1 II පත්‍රයේ ව්‍යූහය

කාලය පැය 03කි. මුළු ලකුණු 100කි.

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් **දෙකකින්** සමන්විත ය.

  A කොටස - ප්‍රශ්න **දහයකි**. ප්‍රශ්න **සියල්ලට** ම පිළිතුරු සැපයිය යුතුය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 25 බැගින් ලකුණු 250කි.

  B කොටස - ප්‍රශ්න **හතකි**. ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සැපයිය යුතුය. එක් ප්‍රශ්නයකට ලකුණු 150 බැගින් ලකුණු 750කි.

  II පත්‍රය සඳහා මුළු ලකුණු $= (250 + 750) \div 10 = 1000 \div 10 = 100$

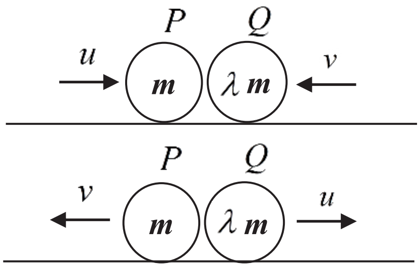
- විභාගයේදී A කොටසට, ප්‍රශ්න පත්‍රයේ ම එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා සපයා ඇති ඉඩ ප්‍රමාණය තුළ පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.

2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය λm වූ Q අංශුවක් පිළිවෙළින් u හා v වේගවලින් එකිනෙක දෙසට, සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත වූ එක ම සරල රේඛාවක් දිගේ චලනය වේ. ඒවායේ ගැටුමෙන් පසු, P අංශුව v වේගයෙන් හා Q අංශුව u වේගයෙන් ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වේ. $\lambda = 1$ බව පෙන්වා, P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය සොයන්න.



පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta(M\underline{v}) \longrightarrow$ යෙදීමෙන්

$$0 = (\lambda mu - mv) - (mu - \lambda mv) \qquad 5$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda - 1)u + (\lambda - 1)v$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda - 1)(u + v) \qquad 5$$

$$\Rightarrow \lambda = 1.$$

e යෙදීමෙන් P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය යැයි ගනිමු. නිව්ටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන් :

$$(u + v) = e(u + v) \qquad 10$$

$$\therefore \quad e = 1. \qquad 5$$

$\longrightarrow u \qquad \longrightarrow -v$

$\longrightarrow -v \qquad \longrightarrow u$

$\boxed{25}$

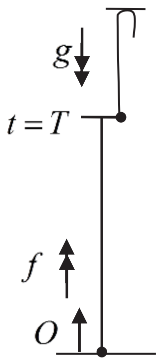
---

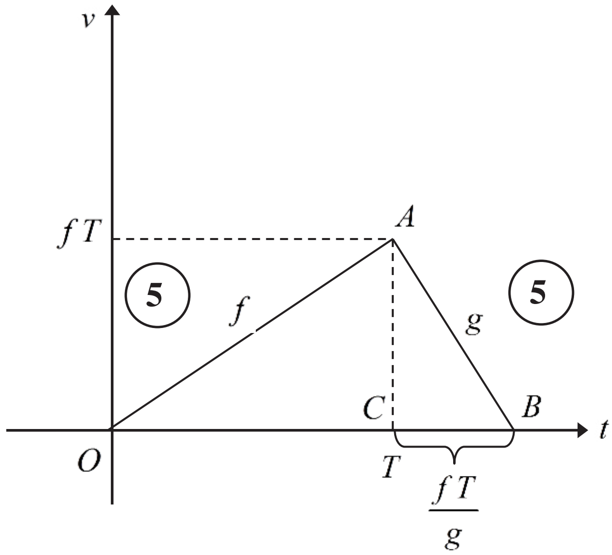
1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 97%ක් වන අතර මෙහි පහසුතාව 66%කි. අංශු දෙකක චලිතය සඳහා ආවේගය = ගම්‍යතා පරිවර්තනය හෝ රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය සහ නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය නිවැරදිව යෙදීම මෙයින් අපේක්ෂා කෙරේ. ඉහත සමීකරණ ලිවීමේදී දිශාව නිවැරදිව නොසැලකීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිති නියමය හා නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය භාවිතයෙන් සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ව හුරු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. කුඩා ඒකාකාර බෝලයක් රැගත් බැලූනයක් කාලය $t = 0$ දී පොළොව මත ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර ඒකාකාර f ත්වරණයකින් සිරස් ව ඉහළට චලනය වේ; මෙහි $f < g$ වේ. කාලය $t = T$ හි දී බෝලය, බැලූනයෙන් සීරුවෙන් ඉවත් වී ගුරුත්වය යටතේ චලනය වේ. $t = 0$ සිට බෝලය එහි උපරිම උස කරා ළඟා වන තෙක් බෝලයේ උඩු අත් චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න. T, f හා g ඇසුරෙන්, බෝලය ළඟා වූ උපරිම උස සොයන්න.





$f = \dfrac{AC}{T}$ සහ $g = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{f}{g}T.$ 5

උපරිම උස $= OAB$ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $= \dfrac{1}{2}\left(T + \dfrac{fT}{g}\right) \times fT.$ 5 5

$$= \frac{fT^2}{2g}\left(f + g\right)$$ $\boxed{25}$

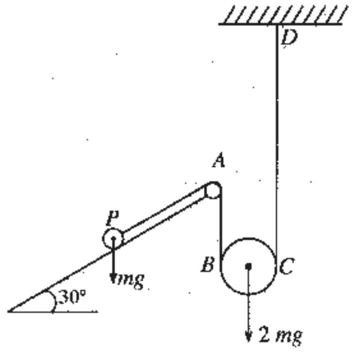
2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

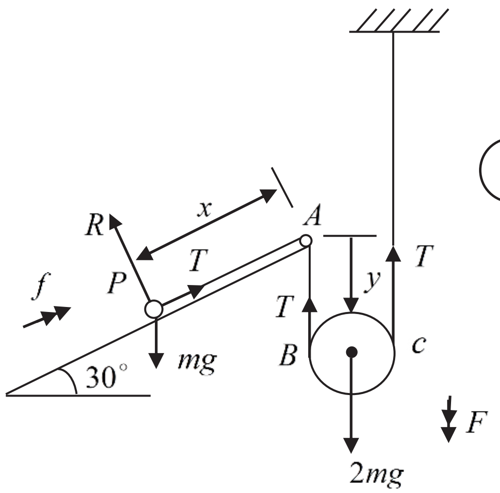
මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 92%ක් පමණි. අංශුවක චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර ඇඳීම සහ එහි භාවිතය මින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 44%ක් පමණි.

ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර ඇඳීමේදී බෝලයේ චලිත දිශා නොසලකා තිබීමෙන් සාර්ථක පිළිතුරු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. ඒ සඳහා සිසුන්ව සරල අභ්‍යාසවල නිරත කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. රූපයේ $PABCD$ යනු තිරසට 30° කින් ආනත අචල සුමට තලයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ඇඳා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකි. තන්තුව, A හි වූ අචල කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් ද ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට කප්පියක් යටින් ද යයි. D ලක්ෂ්‍යය අචල වේ. PA, උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ වන අතර AB හා CD සිරස් වේ. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුවේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය සචල කප්පියේ ත්වරණයෙහි විශාලත්වය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.





5

$x+2y=$ නියතයක් $\Rightarrow \ddot{x}+2\ddot{y}=0 \Rightarrow 2\ddot{y}=-\ddot{x}$. 5

රූපයේ පරිදි f හා F සමගින් $f=2F$ වේ. 5

$\underline{F}=m\underline{a}$ ↗ for P: $T-mg\sin 30^\circ = m f$ 5

$\underline{F}=m\underline{a}$ ↓ for $2mg$: $2mg-2T=2m F$ 5

25

---

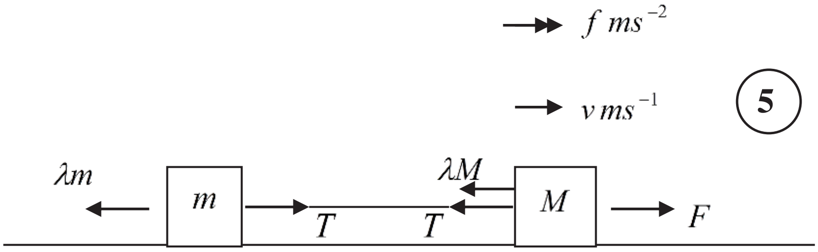
3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 89%ක් පමණි. නිව්ටන්ගේ නියම (**F = ma**) යෙදීම මින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 48%ක් පමණ වේ.

අංශුවේ සහ කප්පියේ ත්වරණ අතර සම්බන්ධතාවය නිවැරදිව ලබා නොගැනීම නිසා සම්පූර්ණ ලකුණු ලබා ගැනීමට අපහසු වී තිබුණි. ඉහත ආකාරයේ සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. ස්කන්ධය M kg වූ ට්‍රක් රථයක් ස්කන්ධය m kg වූ කාරයක් සෘජු තිරස් පාරක් දිගේ ඇදගෙන යනු ලබන්නේ ට්‍රක් රථයේ හා කාරයේ චලිත දිශාවට සමාන්තර වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය කේබලයක් ආධාරයෙනි. ට්‍රක් රථයේ හා කාරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධ පිළිවෙළින් නිව්ටන λM හා නිව්ටන λm වේ; මෙහි $\lambda\,(>0)$ නියතයකි. එක්තරා මොහොතක දී ට්‍රක් රථයේ එන්ජිමෙන් ජනනය කරනු ලබන ජවය P kW වන අතර ට්‍රක් රථයෙහි හා කාරයෙහි වේගය v m s^{-1} වේ. එම මොහොතේ දී කේබලයේ ආතතිය නිව්ටන $\dfrac{1000mP}{(M+m)v}$ බව පෙන්වන්න.



5

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \dfrac{1000P}{v}\ N$ ------------ (1) 5

$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ for M : $F - \lambda M - T = M f$ ----------- (2) 5

$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ for m : $T - \lambda m = m f$ ----------- (3) 5

දැන් (1), (2) හා (3) $\Rightarrow \dfrac{1000P}{v} - \lambda M - T = M f$

$$\Rightarrow \frac{1000P}{v} - \lambda M - T = \frac{M}{m}(T - \lambda m)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1000mP}{(M+m)v}\ N.$$ 5

25

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 93%ක් පමණි. නිව්ටන් නියම **F = ma** හා ක්ෂමතාව සඳහා P = FV යන සමීකරණවල යෙදීම් පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 47%කි.

නිවැරදි බල ලකුණු කිරීම හා ඒවා සාර්ථකව සමීකරණවල යොදා නොගැනීම නිසා දී ඇති පිළිතුරට ළඟා වීමට නොහැකි වී ඇත. මෙවැනි සරල ගැටලු විසඳීමේදී නිවැරදි බල ලකුණු කිරීමට සහ සමීකරණවල යෙදීම් පිළිබඳ විශේෂ අවධානය යොමු කරමින් ගැටලු විසඳීමට යොමු කළ යුතුය.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ හා $2\alpha\mathbf{i}+\alpha\mathbf{j}$ යනු පිළිවෙළින් O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha(>0)$ නියතයකි. අදිශ ගුණිතය භාවිතයෙන්, $A\hat{O}B=\dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.
C යනු $OACB$ සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකය y-අක්ෂය දිගේ පිහිටයි නම්, α හි අගය සොයන්න.

තිත් ගුණිතය : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(-\underline{i}+2\underline{j})\cdot(2\alpha\,\underline{i}+\alpha\,\underline{j})$

$=-2\alpha+2\alpha=0$

5

$\therefore A\hat{O}B=\dfrac{\pi}{2}$. 5

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$=(-1+2\underline{\alpha})\underline{i}+(2+\alpha)\underline{j}$ 5

$\overrightarrow{OC}$ $y-$ අක්ෂය මත පිහිටයි. $\Rightarrow(1-2\alpha)=0$ 5

$\Rightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}$. 5

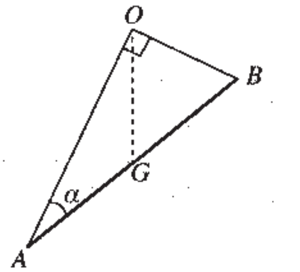
$\boxed{25}$

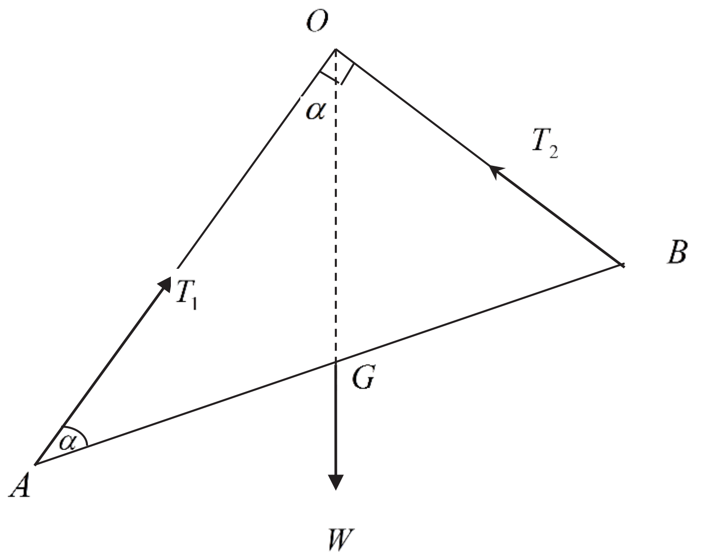
5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 91%ක් පමණි. දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 37%ක් පමණි. $\mathbf{i}$ සහ $\mathbf{j}$ ඒකක දෛශික ඇසුරෙන් දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය ප්‍රකාශ කිරීම නිවැරදිව යොදා නොගැනීමෙන් බොහෝ අපේක්ෂකයින් අවසන් ප්‍රතිඵලයට ළඟා වී නොතිබුණි. අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ විවිධ ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

6 වන ප්‍රශ්නය

6. OA හා OB සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකක් මගින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලන ලද දිග $2a$ හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවයේ පවතී. G යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ හා $O\hat{A}B = \alpha$ බව දී ඇත. $A\hat{O}G = \alpha$ බව පෙන්වා, තන්තු දෙකෙහි ආතති සොයන්න.





5

$A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$, බැවින් A, O සහ B හරහා යන විෂ්කම්භය AB වන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය G වේ.

$\therefore AG = OG.$

$\Rightarrow A\hat{O}G = O\hat{A}G = \alpha$. 5

$\overrightarrow{AO}$ හා $\overrightarrow{BO}$ දිගේ විභේදනයෙන් 5

$T_1 = W\cos\alpha.$ 5

$T_2 = W\sin\alpha.$ 5

$\boxed{25}$

---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 87%ක් පමණි. ඒක තල බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ දෘඪ වස්තුවක සමතුලිතතාව පිළිබඳ දැනුම පරීක්ෂා කිරීම මෙම ප්‍රශ්නයෙන් අපේක්ෂා කර ඇති අතර එහි පහසුතාව 27%කි.

ජ්‍යාමිතික ලක්ෂණ නිවැරදිව හඳුනා නොගැනීම නිසා නිවැරදි පිළිතුරු ලබා ගැනීමට නොහැකි වී තිබුණි. ජ්‍යාමිතික ලක්ෂණ පිළිබඳ වැඩි අවධානය යොමු කරමින් ඒකතල බල තුනක සමතුලිතතාව පිළිබඳ ගැටලු විසඳීමට හුරු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මග හරවා ගත හැක.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{6}$ හා $P(B \mid A) = \frac{1}{4}$ බව දී ඇත. $P(A)$ හා $P(B)$ සොයන්න.

$A' \cup B' = (A \cap B)'$, නිසා $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B)$ වේ.

$$\therefore P(A \cap B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}. \quad 5$$

$$5$$

දැන් $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3}. \quad 5$

$$5$$

තවද, , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}. \quad 5$$

$\boxed{25}$

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 90%ක් වන අතර එහි පහසුතාව 58%කි. මෙය සරල සිද්ධිවල සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයයන් සහ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව පිළිබඳ යෙදීම් අපේක්ෂා කරන ගැටලුවකි. මෙහි $P(A \cup B)$ සඳහා වූ සම්බන්ධය සහ $P(A \setminus B)$ හි අර්ථ දැක්වීම පිළිබඳ දැනුම මදකම නිසා ගැටලුවට සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීමට අපොහොසත් වී තිබුණි.

සම්භාවිතාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයයන් නිවැරදිව යොදා ගැනීමෙන් හා සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කරවීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

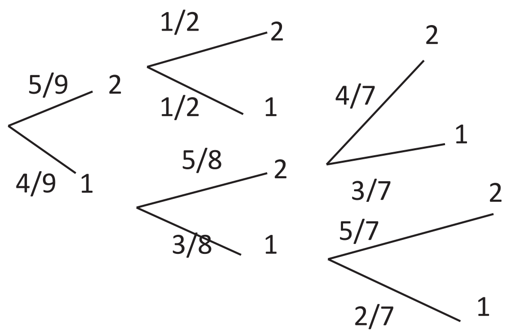
8 වන ප්‍රශ්නය

8. මල්ලක, කාඩ් නවයක් අඩංගු වේ. ඒවායින් හතරක 1 සංඛ්‍යාංකය මුද්‍රණය කර ඇති අතර ඉතිරි ඒවායේ 2 සංඛ්‍යාංකය මුද්‍රණය කර ඇත. ප්‍රතිස්ථාපන රහිත ව වරකට එක බැගින් සසම්භාවීව මල්ලෙන් කාඩ් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් දෙකෙහි සංඛ්‍යාංකයන්හි එකතුව හතර වීමේ,

(ii) ඉවතට ගත් පළමු කාඩ් තුනෙහි සංඛ්‍යාංකයන්හි එකතුව තුන වීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.



(i) පිළිතුර $= \dfrac{5}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{18}$. 5

5

(ii) පිළිතුර $= \dfrac{4}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{1}{21}$. 5

10

25

---

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 86%ක් පමණි. මෙම ගැටලුව ද සම්භාවිතාවය පිළිබඳ සරල ගැටලුවක් වන අතර එහි පහසුතාව 38%ක් පමණි.

මෙහිදී සම්භාවිතාවේ ගුණන නීතිය නිවරුදිව යෙදීම පිළිබඳව අපේක්ෂා කෙරේ. සිද්ධි පිළිබඳව නිවැරදි අවබෝධයක් නොමැති වීම සාර්ථක පිළිතුරු කරා ළඟා නොවීමට හේතු වී තිබුණි. සරල ගැටලු විසඳීමට යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතා මඟ හරවා ගත හැකිය.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. නිරීක්ෂණ හයක අගයන් a, a, b, b, x හා y වේ; මෙහි a, b, x හා y යනු ප්‍රභින්න ධන නිඛිල වන අතර $a<b$ වේ. මෙම නිරීක්ෂණ හයෙහි මාතයන් මොනවා ද?

මෙම මාතයන්හි එකතුය හා ගුණිතය පිළිවෙළින් x හා y බව දී ඇත. නිරීක්ෂණ හයෙහි මධ්‍යන්‍යය $\frac{7}{2}$ වේ නම්, a හා b සොයන්න.

මාතයන් a හා b වේ. 5

$a+b=x$ බව සහ $ab=y$ බව දී ඇත.

මධ්‍යන්‍යය $\frac{7}{2}$ නිසා, $\frac{2a+2b+x+y}{6}=\frac{7}{2}$ වේ. 5

$\therefore 3a+3b+ab=21$ ---------------- (1) 5

(1) $\Rightarrow ab$ යන්න 3 න් බෙදෙන අතර $ab \geq 3$.

තවද (1) $\Rightarrow a+b \leq 6$. 5

$1 \leq a < b$ නිසා

$a=2 \quad b=3$ වේ. 5

$\boxed{25}$

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 85%ක් පමණි. සංඛ්‍යානයේ එන කේන්ද්‍රික ප්‍රවණතා මිනුම් පිළිබඳ දැනුම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 37%ක් පමණි. දී ඇති අගයයන් අතර සම්බන්ධතාවය ලබා ගැනීමට හැකි වුවත්, දී ඇති අවශ්‍යතාවය සපුරාලන සේ a, b හි අගයන් සෙවීමට නොහැකි වී තිබුණි. කේන්ද්‍රික ප්‍රවණතා මිනුම් සම්බන්ධ විවිධ ආකාරයේ සරල ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කිරීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ **යන සංඛ්‍යා දහයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් 10 හා 9 වේ.** x_{10} **සංඛ්‍යාව ඉවත් කිරීමෙන් පසු ඉතිරි වන සංඛ්‍යා නවයෙහි ද මධ්‍යන්‍යය 10 බව දී ඇත. මෙම සංඛ්‍යා නවයෙහි විචලතාව සොයන්න.**

මධ්‍යන්‍යය $=10 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 10.$ 5

විචලතාව $=9 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - 10^2 = 9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 1090.$ 5

පළමු සංඛ්‍යා 9 හි මධ්‍යන්‍යය $=10 \Rightarrow x_{10} = 10.$ 5

$\therefore \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 990.$ 5

$\therefore$ පළමු සංඛ්‍යා 9හි විචලතාව $= \dfrac{990}{9} - 10^2 = 10.$ 5

$\boxed{25}$

---

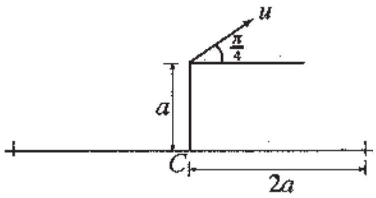
10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය අනිවාර්ය ප්‍රශ්නයක් වුවත් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇත්තේ 78%ක් පමණි. අසමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිබඳ දැනුම මෙයින් අපේක්ෂා කරන අතර එහි පහසුතාව 26%ක් පමණි.

විචලතාවය පිළිබඳ සමීකරණය නිවැරදිව යොදා ගැනීම දුර්වල මට්ටමක පැවතීම නිසා සාර්ථකව පිළිතුරු කරා ළඟා වීමට අපොහොසත් වී තිබුණි. මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාවය ඇතුළත් වන පරිදි විවිධ ගැටලු විසඳීමට සිසුන්ට හුරු කරවීම මගින් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය.

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) උස a වූ සිරස් කුළුණක පාදය, තිරස් පොළොව මත වූ අරය $2a$ වන වෘත්තාකාර පොකුණක C කේන්ද්‍රයෙහි ඇත. කුළුණ මුදුනේ සිට තිරසෙන් ඉහළට $\dfrac{\pi}{4}$ කෝණයකින් u වේගයක් සහිත ව කුඩා ගලක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. (රූපය බලන්න.) ගල, ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වී C සිට R දුරකින් C හරහා වූ තිරස් තලයෙහි වදියි. $gR^2 - u^2R - u^2a = 0$ සමීකරණය මගින් R දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

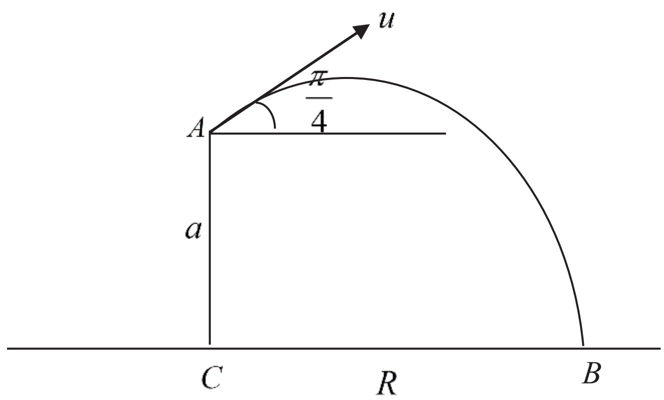


u, a හා g ඇසුරෙන් R සොයා, $u^2 > \dfrac{4}{3}ga$ නම්, ගල පොකුණ තුළට නොවැටෙන බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් නැගෙනහිර දිශාවට යාත්‍රා කරයි. B බෝට්ටුවක සිට බටහිරින් දකුණට θ කෝණයකින් l km දුරක නැව තිබෙන මොහොතේ දී බෝට්ටුව, නැව හමුවන අපේක්ෂාවෙන්, පොළොවට සාපේක්ෂව v km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක ගමන් කරයි; මෙහි $u\sin\theta < v < u$ වේ. නැව හා බෝට්ටුව ඒවායේ වේග හා පෙත් නොවෙනස්ව පවත්වා ගන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවට ගත හැකි පෙත් දෙක නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවට ගත හැකි චලිත දිශා දෙක අතර කෝණය $\pi - 2\alpha$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{u\sin\theta}{v}\right)$ වේ.

මෙම පෙත් දෙක දිගේ නැව හමුවීම සඳහා බෝට්ටුව ගනු ලබන කාල, පැය t_1 හා පැය t_2 යැයි ගනිමු. $t_1 + t_2 = \dfrac{2lu\cos\theta}{u^2 - v^2}$ බව පෙන්වන්න.



$s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow$ A සිට B දක්වා : $R = u\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot t = \dfrac{ut}{\sqrt{2}}$ --------------- (1) 5

$\uparrow$ A සිට B දක්වා : $-a = u\sin\dfrac{\pi}{4}t - \dfrac{1}{2}gt^2$ ----------------(2) 10

(1) හා (2) $\Rightarrow$ $-a = R - \dfrac{1}{2}g\dfrac{2R^2}{u^2}$ 5

$\Rightarrow gR^2 - u^2R - u^2a = 0$ 5

25

$$\therefore R = \frac{u^2 \pm \sqrt{u^4 + 4u^2 ag}}{2g}.$$ 5

$$R = \frac{u^2 + \sqrt{u^4 + 4agu^2}}{2g}$$ 5 $(\because R > 0)$ 5

15

$u^2 > \frac{4}{3} ga.$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $R > \dfrac{\frac{4}{3}ga + \sqrt{\frac{16}{9}g^2a^2 + \frac{16}{3}g^2a^2}}{2g} = \dfrac{\frac{4}{3}ga + \frac{8}{3}ga}{2g} = 2a.$ 5 5

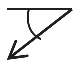
$\Rightarrow R > 2a$.

ගල පොකුණට නොවැටේ.

10

(*b*) $\underline{V}(S, E) = \rightarrow u$ 5

$\underline{V}(B, E) = v$ 5

$\underline{V}(B, S) =$  5

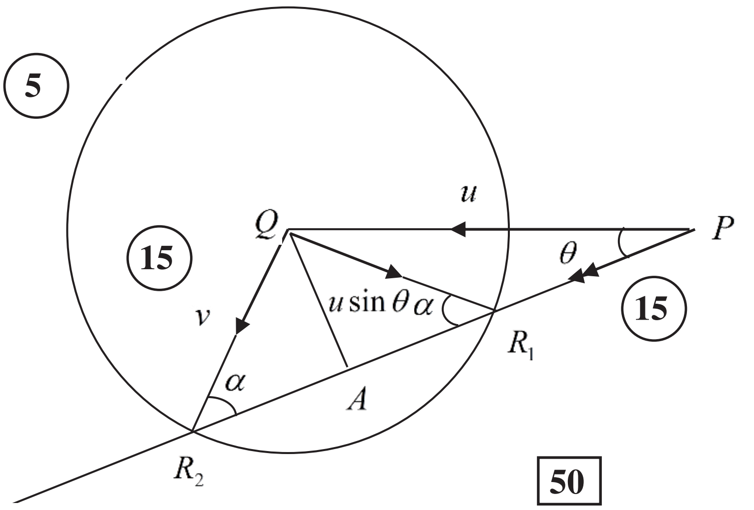
$u \sin\theta < v < u$

$\underline{V}(B, S) = \underline{V}(B, E) + \underline{V}(E, S)$

$= \underline{V}(E, S) + \underline{V}(B, E)$ 5

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PR}$.



50

අවශ්‍ය කෝණය $= R_1\hat{Q}R_2$ 5

$= \pi - 2\alpha$, මෙහි $Q\hat{R}_2R_1 = \alpha$. 5

$$\sin\alpha = \frac{QA}{QR_2} = \frac{u\sin\theta}{v}$$ 5

$$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\theta}{v}\right).$$

15

$$t_1 + t_2 = \frac{l}{PR_1} + \frac{l}{PR_2} = \frac{l(PR_1 + PR_2)}{PR_1 \cdot PR_2}.$$

5

$$PR_1 = PA - AR_1$$

$$= u\cos\theta - \sqrt{v^2 - u^2\sin^2\theta}$$ 10

$$PR_2 = PA + AR_2$$

$$= u\cos\theta + \sqrt{v^2 - u^2\sin^2\theta}$$ 10

$$\therefore t_1 + t_2 = \frac{l\ 2u\cos\theta}{u^2\cos^2\theta - (v^2 - u^2\sin^2\theta)}$$ 5

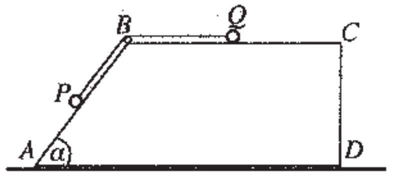
$$= \frac{2lu\cos\theta}{u^2 - v^2}\ (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$$ 5

35

---

12 වන ප්‍රශ්නය

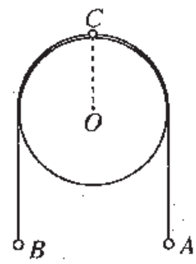
12.(a) රූපයෙහි දැක්වෙන $ABCD$ ත්‍රපීසියම, ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ යන සිරස් හරස්කඩකි. AD හා BC රේඛා සමාන්තර වන අතර AB රේඛාව එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වේ. තව ද $AB = 2a$ ද $B\hat{A}D = \alpha$ ද වේ; මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ හා $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ වේ. AD අයත් මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලබයි. දිග $l\,(> 2a)$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් B හි පිහිටි කුඩා සුමට කප්පියක් උඩින් යන අතර එහි එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් ද අනෙක් කෙළවරට එම m ස්කන්ධය ම සහිත වෙනත් Q අංශුවක් ද ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි P අංශුව AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ ද Q අංශුව BC මත ද තබා තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



ගෙබිමට සාපේක්ෂව කුට්ටියේ ත්වරණය $\frac{4}{17}g$ බව පෙන්වා, කුට්ටියට සාපේක්ෂව P හි ත්වරණය සොයන්න.

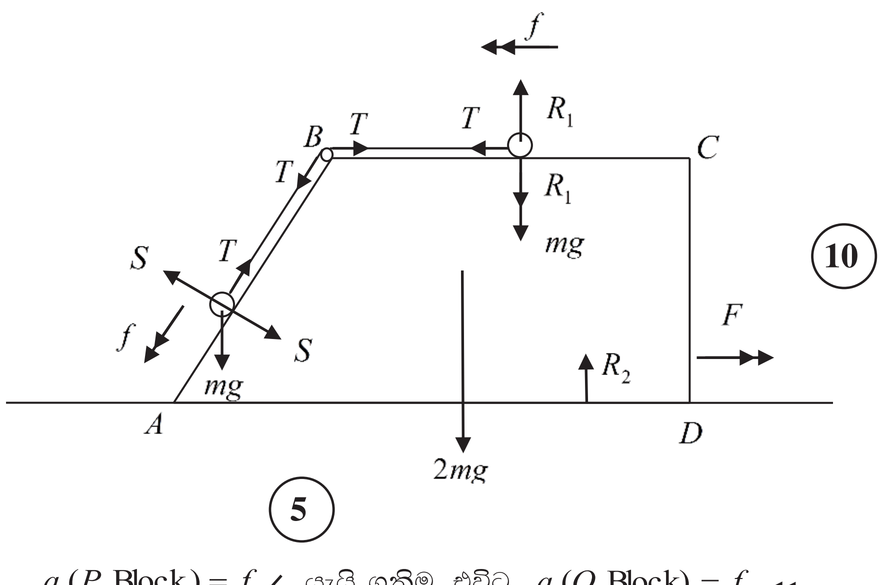
තව ද P අංශුව A කරා ළඟා වීමට ගන්නා කාලය $\sqrt{\frac{17a}{5g}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) එක එකක ස්කන්ධය m වූ A හා B අංශු දෙකක් දිග $l(> 2\pi a)$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳනු ලැබේ. ස්කන්ධය $2m$ වූ C අංශුවක් තන්තුවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඈඳනු ලැබේ. කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අචල සුමට ගෝලයක උච්චතම ලක්ෂ්‍යයෙහි C අංශුව ඇතිව ද A හා B අංශු O තුළින් වූ සිරස් තලයක නිදහසේ එල්ලෙමින් ද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තන්තුව ගෝලය මතින් තබා ඇත. සරල රේඛීය පෙතක A අංශුව පහළට චලනය වන පරිදි C අංශුවට ගෝලය මත එම සිරස් තලයේ ම කුඩා විස්ථාපනයක් දෙනු ලැබේ. C අංශුව ගෝලය සමග ස්පර්ශව ඇතිතාක් $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(1-\cos\theta)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි θ යනු OC හැරී තිබෙන කෝණය වේ.



$\theta = \frac{\pi}{3}$ වන විට C අංශුව, ගෝලය අතහැර යන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(a)



$\underline{a}\,(P, \text{Block}) = f \swarrow$ යැයි ගනිමු. එවිට $\underline{a}\,(Q, \text{Block}) = f \twoheadleftarrow$

තවද $\underline{f}(\text{Block}, E) = F \twoheadrightarrow$

$\underline{F} = m\underline{a}$: යෙදීමෙන්

පද්ධතියට $\rightarrow$ $0 = 2mF + m(F - f) + m(F - f\cos\alpha)$ **10**

$$\Rightarrow 0 = 4F - f - f \times \frac{3}{5}$$

$\therefore f = \dfrac{5F}{2}$ ------------(1) **5**

P අංශුවට $\swarrow$ $mg\sin\alpha - T = m(f - F\cos\alpha)$ ------------ (2) **10**

Q අංශුවට $\leftarrow$ $T = m(f - F)$ -------------(3) **10**

(2) + (3) $\Rightarrow$ $mg \times \dfrac{4}{5} = m(f - F) + m\left(f - F \times \dfrac{3}{5}\right)$ **5**

$$\Rightarrow \quad 4g = 5f - 5F + 5f - 3F$$

$\Rightarrow \quad 4g = 10f - 8F$ **5**

දැන් (1) $\Rightarrow$ $4g = 25F - 8F$

$\Rightarrow \quad F = \dfrac{4}{17}g$. **5**

(1) $\Rightarrow$ $f = \dfrac{10g}{17}$. **5**

70

$s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$: $\swarrow$ යෙදීමෙන්

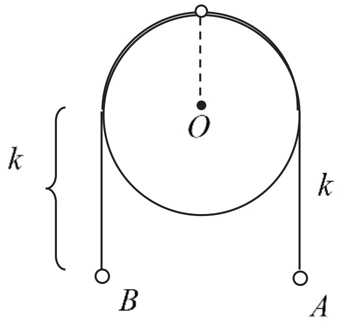
(P, B) හි චලිතය සඳහා : $a = 0 + \dfrac{1}{2}f\,t^2$ **5**

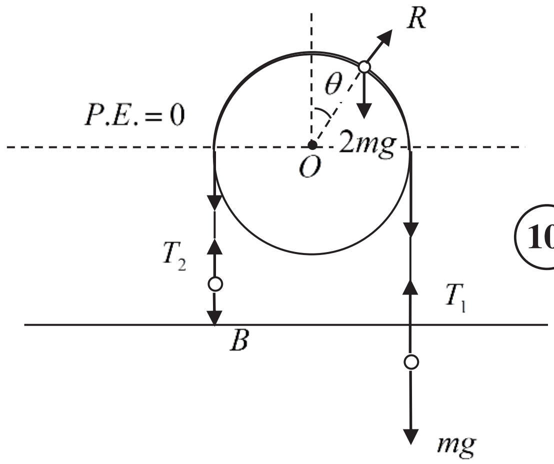
5

$\therefore \; t = \sqrt{\dfrac{2a}{\frac{10g}{17}}} = \sqrt{\dfrac{17a}{5g}}$.

10

(*b*)





10

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්

$$\frac{1}{2}\times 2m\times(a\dot{\theta})^2+2\times\frac{1}{2}\times m\times(a\dot{\theta})^2+2mga\cos\theta-mg(k-a\theta)-mg(k+a\theta)=2mgk+2mga$$

25 $\left\{\begin{array}{l}\text{PE 10}\\ \text{KE 10}\\ \text{Equation 5}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow 2a\dot{\theta}^2=-2g\cos\theta+2g$$ 10

$$\therefore \theta^2=\frac{g}{a}(1-\cos\theta).$$

$\boxed{45}$

$\underline{F}=m\underline{a}$:

C සඳහා $\nearrow$; $\quad R-2mg\cos\theta=-2m\cdot a\dot{\theta}^2$ 10

$$\Rightarrow \quad R=2mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)$$

$$=2mg(2\cos\theta-1).$$ 5

$\Rightarrow$ θ වැඩි වන විට R අඩු වන අතර $\cos\theta=\frac{1}{2}$ වන විට $R=0$ වේ. 5

$\therefore$ $\theta=\frac{\pi}{3}$ වන විට C ගෝලය හැර යයි. 5

$\boxed{25}$

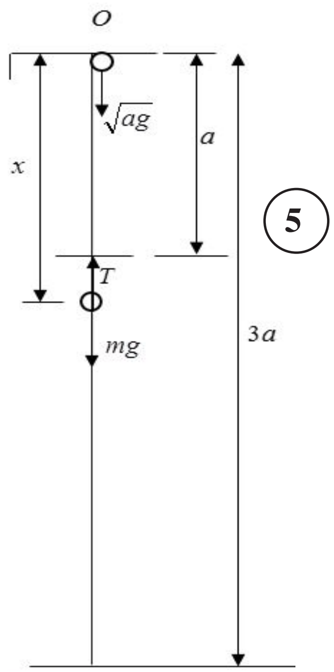
---

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය mg වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් සුමට තිරස් ගෙබිමකට $3a$ උසක් ඉහළින් වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට ඈඳා ඇත. අංශුව O අසලින් තබා, $\sqrt{ga}$ වේගයකින් සිරස් ව පහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. තන්තුවේ දිග x යන්න, $a \leq x < 3a$ සඳහා $\ddot{x} + \frac{g}{a}(x-2a) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වා මෙම සරල අනුවර්තී චලිතයෙහි කේන්ද්‍රය සොයන්න.
ගෙබිම සමග පළමු ගැටුම තෙක් අංශුවේ පහළට චලිතය සඳහා ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $a \leq x < 3a$ සඳහා $\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ බව පෙන්වන්න.
$X = x - 2a$ යැයි ගනිමින් අවසාන සමීකරණය $-a \leq X < a$ සඳහා $\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\left(A^2 - X^2\right)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි A යනු නිර්ණය කළ යුතු විස්තාරය වේ.
ගෙබිම සමග පළමු ගැටුමට මොහොතකට පෙර අංශුවේ ප්‍රවේගය කුමක් ද?
අංශුව හා ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{\sqrt{3}}$ වේ. පළමු ගැටුමෙන් පසු තන්තුව බුරුල් වන තෙක් අංශුවේ උඩු අත් චලිතයට $-a \leq X < a$ සඳහා $\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\left(B^2 - X^2\right)$ බව දී ඇත; මෙහි B යනු මෙම නව සරල අනුවර්තී චලිතයේ නිර්ණය කළ යුතු විස්තාරය වේ.
ඉහතින් විස්තර කරන ලද යටි අත් හා උඩු අත් සරල අනුවර්තී චලිතවල අංශුව යෙදෙන මුළු කාලය $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}$ බව පෙන්වන්න.

$a \leq x < 3a$: සඳහා

$$T = \frac{mg}{a}(x-a) \quad 5$$



$\underline{F} = m\underline{a}$: යෙදීමෙන්

m සඳහා $m \downarrow$; $mg - T = m\ddot{x}$ 10

$$\Rightarrow mg - \frac{mg}{a}(x-a) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{a}(x-2a) = 0 \quad 5$$

$\ddot{x} = 0$ මගින් කේන්ද්‍රය දෙනු ලැබේ. i.e. $x = 2a$.

5

එම නිසා C, හි කේන්ද්‍රය පවතී. මෙහි C යනු

5

$OC = 2a$ වූ O ට සිරස්ව පහළින් පිහිටන ලක්ෂ්‍යයයි. $\boxed{35}$

ශක්ති සංස්ථිතියෙන් : $\frac{1}{2}m(ga) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}mg\frac{(x-a)^2}{a}$ 20

$$ga = \dot{x}^2 - 2gx + \frac{g}{a}(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$\dot{x}^2 = ga + 2gx - \frac{g}{a}x^2 + 2gx - ga$$

$\dot{x}^2 = \frac{g}{a}(4ax - x^2)$ for $a \le x < 3a$ 5

$\boxed{25}$

$X = x - 2a \Rightarrow \dot{X} = \dot{x}$ 5

තවද $a \le x < 3a \Leftrightarrow -a \le X < a.$

$\dot{X}^2 = \frac{g}{a}\{4a(X+2a) - (X+2a)^2\}$ 5

$= \frac{g}{a}\{4a^2 - X^2\}$ for $-a \le X < a$ 5

$\therefore A = 2a$. 5

$\boxed{20}$

$\downarrow v$ යනු ගැටුමට පෙර අංශුවේ ප්‍රවේගය ලෙස ගන්න.

එවිට $v^2 = \frac{g}{a}(4a^2 - a^2) = 3ga$
5

$\therefore v = \sqrt{3ga}$ 5

$\boxed{10}$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමයෙන් ගැටුමට පසු ප්‍රවේගය $\uparrow = \sqrt{ga}$ $\left(\because e = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 10

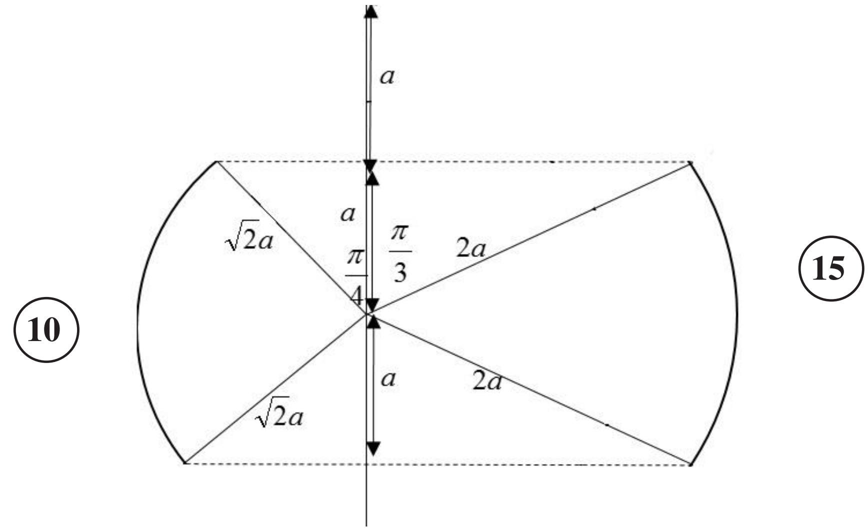
$\dot{X}^2 = \frac{g}{a}(B^2 - X^2)$

$X = a$ වන විට $\dot{X} = \sqrt{ga}$ වේ.

$ga = \frac{g}{a}(B^2 - a^2)$ 5

$\Rightarrow B = \sqrt{2}a$. 5

$\boxed{20}$



$\sqrt{\frac{g}{a}}t_1 = \frac{\pi}{3}$ නිසා $t_1 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$ වේ. 5

$\sqrt{\frac{g}{a}}t_2 = \frac{\pi}{2}$ නිසා $t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ වේ. 5

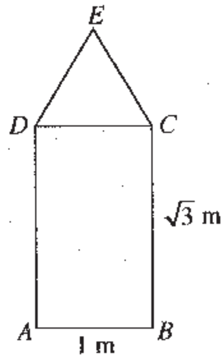
$\therefore t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{a}{g}}$. 5

$\boxed{40}$

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) A හා B සමග **ඒක රේඛීය නොවන** O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ. O අනුබද්ධයෙන් C ලක්ෂ්‍යයක පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{c} = (1-\lambda)\,\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $0<\lambda<1$ වේ.
$\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{CB}$ දෛශික $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා λ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
ඒ නයින්, C ලක්ෂ්‍යය AB රේඛා ඛණ්ඩය මත පිහිටන බවත් $AC : CB = \lambda : (1-\lambda)$ බවත් පෙන්වන්න.
දැන්, OC රේඛාව AOB කෝණය සමච්ඡේදනය කරන්නේ යැයි සිතමු. $|\mathbf{b}|(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්**, λ සොයන්න.

(*b*) රූපයෙහි $ABCD$ යනු $AB = 1$ m හා $BC = \sqrt{3}$ m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන අතර CDE යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. විශාලත්වය නිව්ටන $5, 2\sqrt{3}, 3, 4\sqrt{3}, P$ හා Q වූ බල පිළිවෙළින් BA, DA, DC, CB, CE හා DE දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරයි. මෙම බල පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ.
$P = 4$ හා $Q = 8$ බව පෙන්වා, මෙම යුග්මයේ ඝූර්ණය සොයන්න. දැන්, BA හා DA දිගේ ක්‍රියාකරන බලවල විශාලත්ව එලෙසම තිබිය දී ඒවායේ දිශා ප්‍රතිවර්තනය කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය විශාලත්වය නිව්ටන $2\sqrt{37}$ සහිත තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න.



මෙම සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියාරේඛාව දික් කළ BA හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A සිට ඇති දුර $\frac{7}{4}$ m බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*a*) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ සහ $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

5 5

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \underline{c} - \underline{a} = (1-\lambda)\,\underline{a} + \lambda\underline{b} - \underline{a}.$$

$$= \lambda(\underline{b} - \underline{a}). \quad 5$$

$$\overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c} = \underline{b} - (1-\lambda)\underline{a} - \lambda\underline{b} \quad 5$$

$$= (1-\lambda)(\underline{b} - \underline{a}). \quad 5$$

$\boxed{25}$

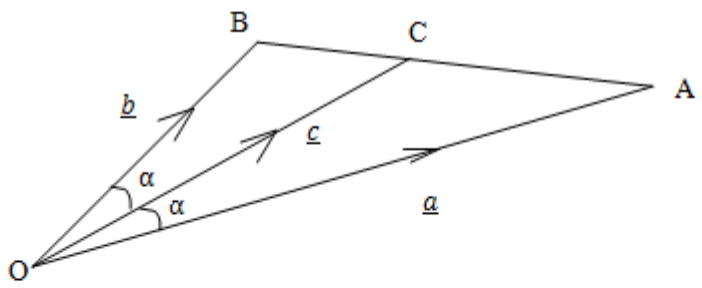
$$\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)}\overrightarrow{CB} \quad 5$$

5

$\therefore$ C යන්න AB මත පිහිටන අතර $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{\lambda}{(1-\lambda)}$.

i. e. $AC : CB = \lambda : (1-\lambda)$ 5

$\boxed{15}$



$B\hat{O}C = A\hat{O}C$

$\underline{a} \cdot \underline{c} = |\underline{a}||\underline{c}|\cos\alpha$ 5

$b \cdot \underline{c} = |b||\underline{c}|\cos\alpha$ 5

$\Rightarrow \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{c}}{|\underline{a}|} = \dfrac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{b}|}$ 5

$\Rightarrow |\underline{b}|(\underline{a} \cdot \underline{c}) = |\underline{a}|(\underline{b} \cdot \underline{c})$ 5

$\boxed{20}$

5

$\Rightarrow |\underline{b}|\{(1-\lambda)|\underline{a}|^2 + \lambda\, \underline{a} \cdot \underline{b}\} = |\underline{a}|\{(1-\lambda)\, \underline{a} \cdot \underline{b} + \lambda|\underline{b}|^2\}$ 5

5

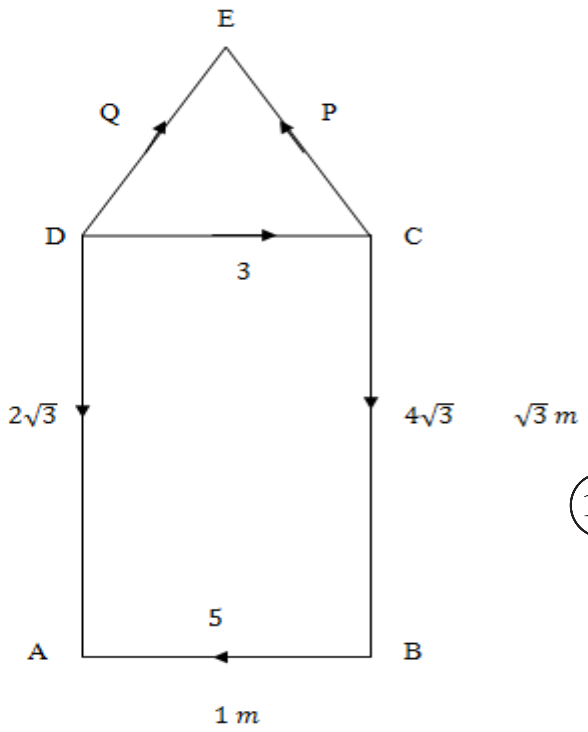
$(1-\lambda)|\underline{a}|\{|\underline{a}||\underline{b}| - a \cdot \underline{b}\} = \lambda|\underline{b}|\{|\underline{a}||\underline{b}| - \underline{a} \cdot \underline{b}\}$

$(1-\lambda)|\underline{a}| = \lambda|\underline{b}|$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|+|\underline{b}|}.$ ($\because$ $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ප්‍රභින්න සහ ඒක රේඛීය නොවේ.)

$\boxed{15}$

(*b*)



10

පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වන නිසා,

$\rightarrow \quad 3-5+Q\cos 60^\circ - P\cos 60^\circ = 0$ 5

$\Rightarrow \quad P-Q=-4,$ සහ 5

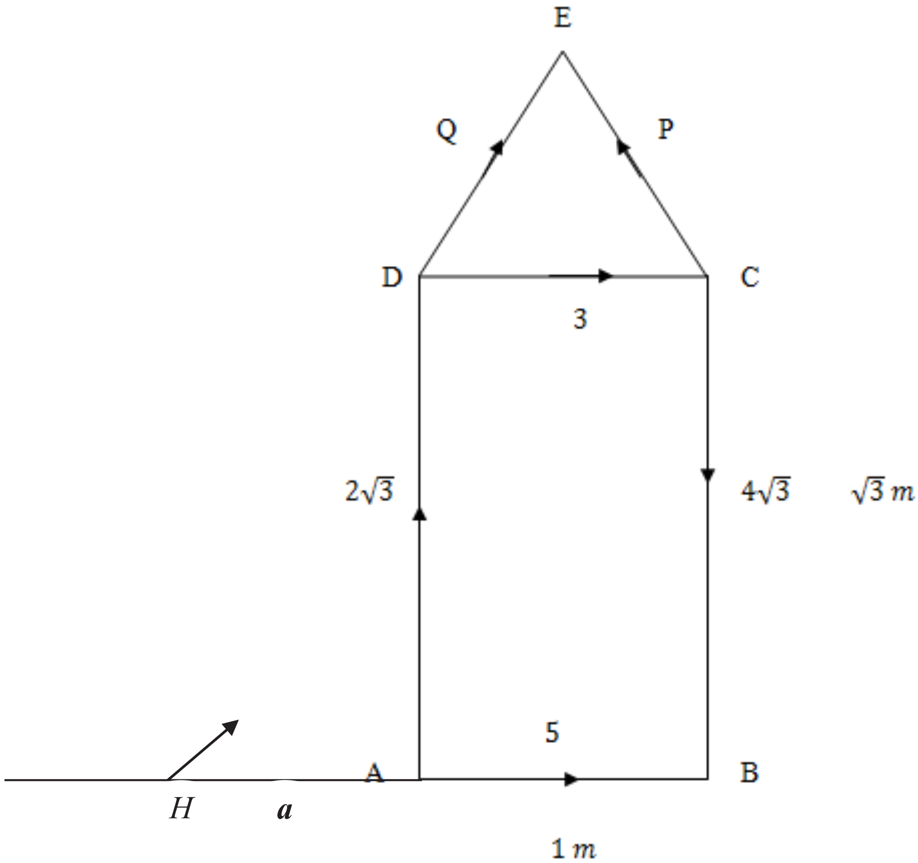
$\uparrow \quad -2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+Q\sin 60^\circ + P\sin 60^\circ = 0$ 5

$\Rightarrow \quad P+Q=12$ 5

$\therefore \quad P=4$ සහ $Q=8.$ 5

E ↻ යුග්මයේ ඝූර්ණය $= 7\sqrt{3}Nm$ 10

45



$\rightarrow \quad X = 5 + 3 + 8\cos 60^\circ - 4\cos 60^\circ = 10$ 5

$\uparrow \quad Y = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 8\sin 60^\circ + 4\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ 5

$R = \sqrt{100 + 48} = 2\sqrt{37}$ 5

$\boxed{15}$

H යනු දික් කල BA, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු.

H

$-6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}(1+a) + \sqrt{3}(3+4-2) = 0$ 10

$-6a + 2 + 2a + 5 = 0$

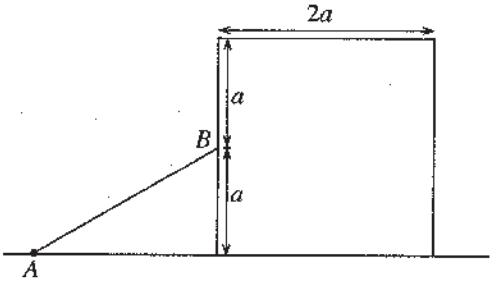
$a = \frac{7}{4}m$. 5

$\boxed{15}$

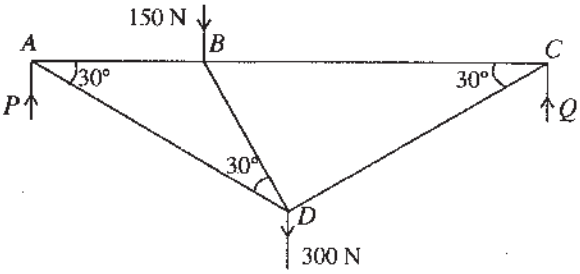
---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) බර W හා පැත්තක දිග $2a$ වන ඒකාකාර ඝනකාකාර කුට්ටියක් රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. බර $2W$ හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර තිරස් ගෙබිමෙහි ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇති අතර B කෙළවර ඝනකයේ සුමට සිරස් මුහුණතකට එරෙහිව එහි කේන්ද්‍රයේ තබා ඇත. දණ්ඩ ඔස්සේ යන සිරස් තලය කුට්ටියේ එම සිරස් මුහුණතට ලම්බ වන අතර පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී. (අදාළ සිරස් හරස්කඩ සඳහා රූපය බලන්න.) ඝනකාකාර කුට්ටිය හා රළු තිරස් ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. $\mu \geq \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

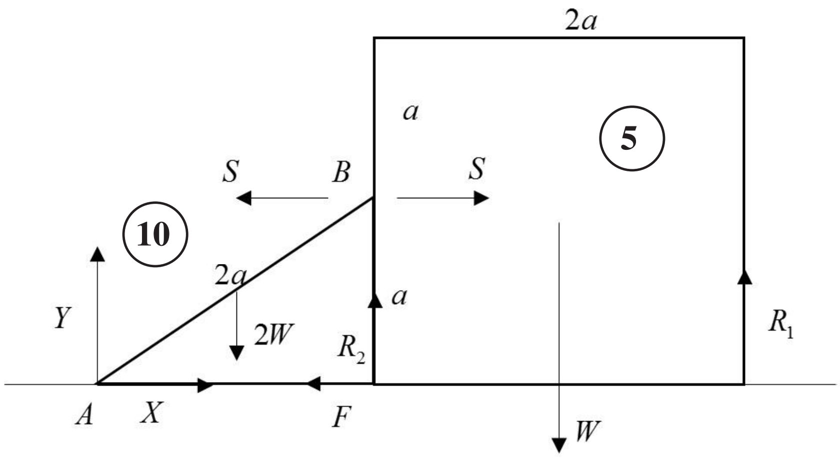


(*b*) කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කරන ලද AB, BC, AD, BD හා CD සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් රූපයේ පෙන්වයි. $AB =$ මීටර a හා $BC =$ මීටර $2a$ වන අතර $B\hat{A}D = B\hat{D}A = B\hat{C}D = 30^\circ$ වේ. රාමු සැකිල්ලට B හි දී 150 N හා D හි දී 300 N භාර යොදා ඇත. එය AB හා BC තිරස් වන පරිදි පිළිවෙළින් A හා C හි දී යොදන ලද P හා Q සිරස් බල දෙකකින් ආධාර කරනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත. $P = 250$ N බව පෙන්වන්න.



බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ **ඒ නයින්**, සියලු ම දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

(*a*)



කුට්ටිය සඳහා ↑

$$R_1 + R_2 = W$$ 10

කුට්ටිය සඳහා →

$$F = S$$ 5

AB සඳහා $\overset{\curvearrowleft}{A}$ $S \times a - 2W \times \frac{\sqrt{3}a}{2} = 0$ **10**

$\therefore S = \sqrt{3}W$ **5**

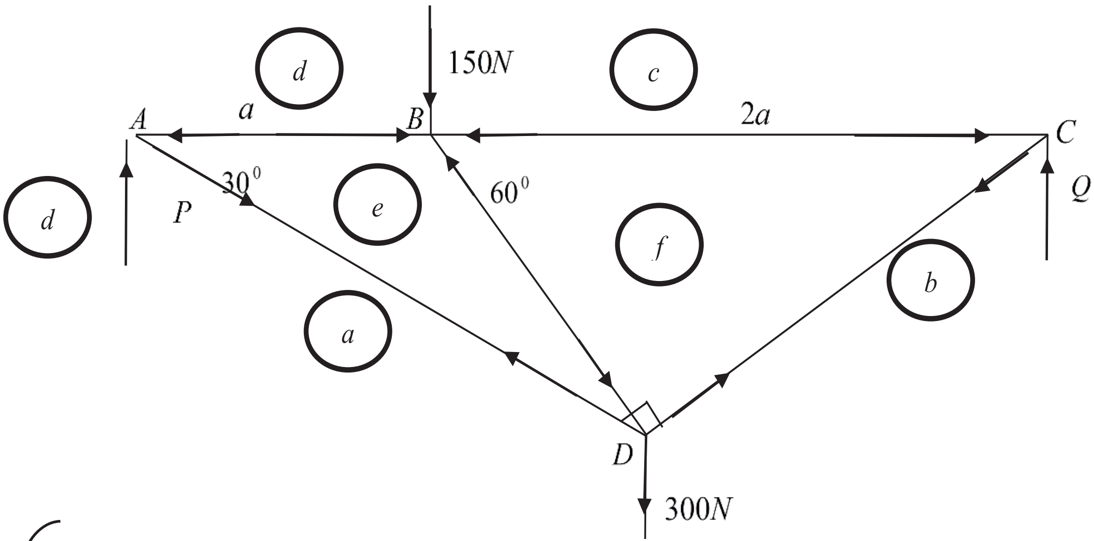
$\mu \geq \frac{|F|}{(R_1 + R_2)}$ **10**

$\mu \geq \frac{\sqrt{3}W}{W}$

$\mu \geq \sqrt{3}$ **5**

$\boxed{60}$

(*b*)

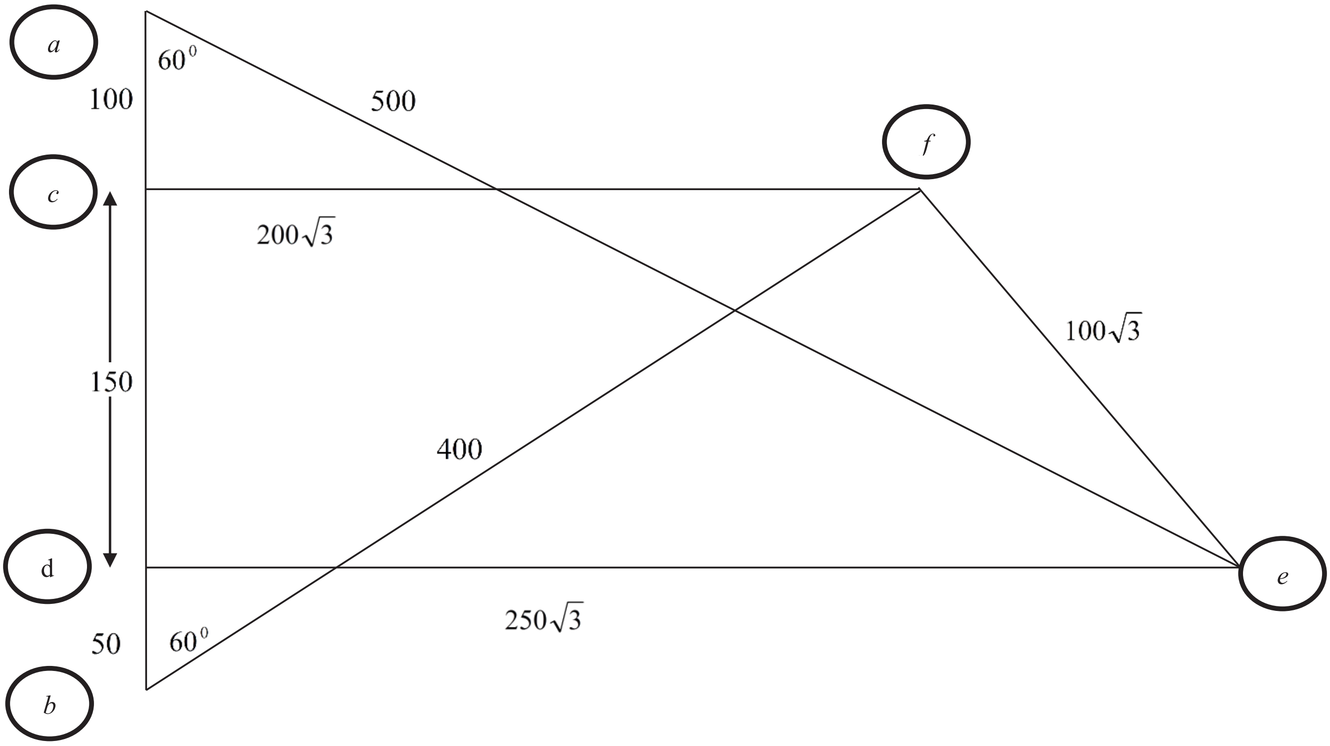


$\overset{\curvearrowright}{C}$

$150 \times 2a + 300\left(2a - \frac{a}{2}\right) - P.3a = 0$ **5**

$\Rightarrow P = 250N$ **5**

$\boxed{10}$



සන්ධි තුනට 30

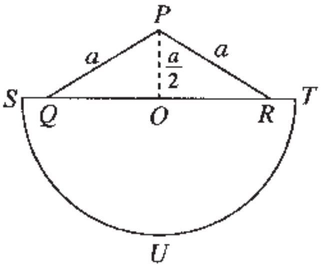
දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB		$250\sqrt{3}\ N$ 10
BC		$200\sqrt{3}\ N$ 10
CD	$400\ N$ 10	
DA	$500\ N$ 10	
DB		$100\sqrt{3}\ N$ 10

80

16 වන ප්‍රශ්නය

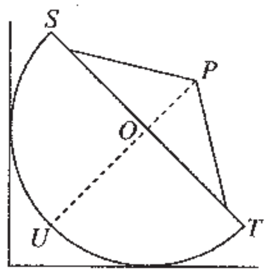
16. කේන්ද්‍රය C හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයෙන් යුත් තුනී ඒකාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය C සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.

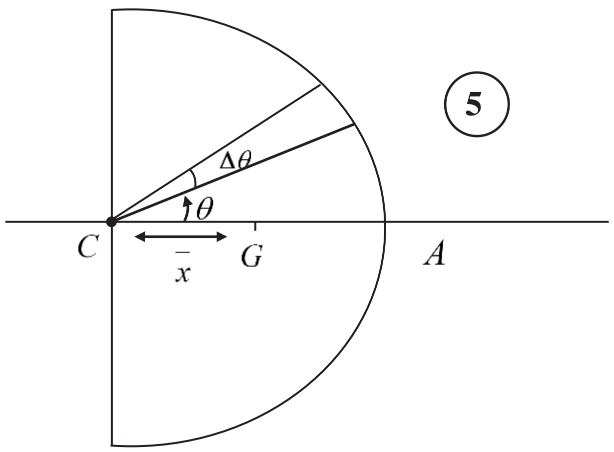
යාබද රූපයෙහි PQ, PR හා ST යනු, ඒකක දිගක ස්කන්ධය ρ වූ තුනී ඒකාකාර කම්බියකින් කපා ගත් සරල රේඛීය කැබලි තුනකි. PQ හා PR කැබලි දෙක P ලක්ෂ්‍යයෙහි දී එකිනෙකට පාස්සා ඉන් පසු Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී ST ට පාස්සා ඇත. $PQ = PR = a,\ ST = 2a$ හා $PO = \frac{a}{2}$ බව දී ඇත; මෙහි O යනු QR හා ST යන දෙකෙහි ම මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ. තව ද SUT යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය $k\rho$ වූ තුනී ඒකාකාර කම්බියකින් සාදා ගත් කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයකි; මෙහි $k\ (>0)$ නියතයක් වේ. SUT අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බිය PQR තලයේ S හා T ලක්ෂ්‍යවල දී ST කම්බියට පාස්සා රූපයේ දැක්වෙන L දෘඪ තල කම්බි රාමුව සාදා ඇත. L හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය P සිට $\left(\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right)\frac{a}{2}$ දුරකින් ඇති බව පෙන්වන්න.



යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි L කම්බි රාමුව, එහි වෘත්තාකාර කොටස සුමට සිරස් බිත්තියක හා ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් රළු තිරස් ගෙබිමක ස්පර්ශ වෙමින්, එහි තලය බිත්තියට ලම්බව සමතුලිතව ඇත. L මත ක්‍රියාකරන බල ලකුණු කර $k > \frac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

දැන් $k = 1$ යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්කන්ධය m වන අංශුවක් L ට සම්බන්ධ කළ පසු ද ඉහත පිහිටීමේ ම සමතුලිතතාව පවත්වාගෙන යයි. $m < 3\rho a$ බව පෙන්වන්න.





සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, CA මත පිහිටයි. සහ $OG = \bar{x}$ 5

ρ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය යැයි ගනිමු.

එවිට $\Delta m = a(\Delta\theta)\rho$ සහ $\bar{x} = \dfrac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\,\rho\, a\cos\theta\, d\theta}{\pi\, a\, \rho}$ 10 5 $= \dfrac{a}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$

$= \dfrac{a}{\pi}\cdot \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ 5

$= \dfrac{a}{\pi}\left[2\sin\dfrac{\pi}{2}\right]$ 5

$= \dfrac{2a}{\pi}.$

එනයින් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය C සිට $\dfrac{2a}{\pi}$ දුරකින් පවතී.

$\boxed{35}$

වස්තුව	ස්කන්ධය	සිරස් දුර, P සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට කේන්ද්‍රයට ↓
PR	$a\rho$	$\dfrac{a}{4}$ 5
PQ	$a\rho$ 10	$\dfrac{a}{4}$ 5
ST	$2a\rho$	$\dfrac{a}{2}$ 5
SUT	$\pi ak\rho$ 5	$\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{\pi}$ 5
සංයුක්ත වස්තුව	$(4+\pi k)a\rho$ 5	$\bar{x}_1$

සමමිතියෙන් L හි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය P හා O යා කරන රේඛාව මත පිහිටයි. 5

ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයේ අර්ථ දැක්වීම මගින්,

$$(4a\rho + \pi a k \rho)\overline{x_1} = 2a\rho \times \frac{a}{4} + 2a\rho \times \frac{a}{2} + \pi a k \rho \times \left(\frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\right)$$ 15

$$\Rightarrow (4 + \pi k)\overline{x_1} = \frac{a}{2} + a + \frac{\pi a k}{2} + 2ak$$ 5

$$\Rightarrow \overline{x_1} = \left(\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right)\frac{a}{2}.$$ 5

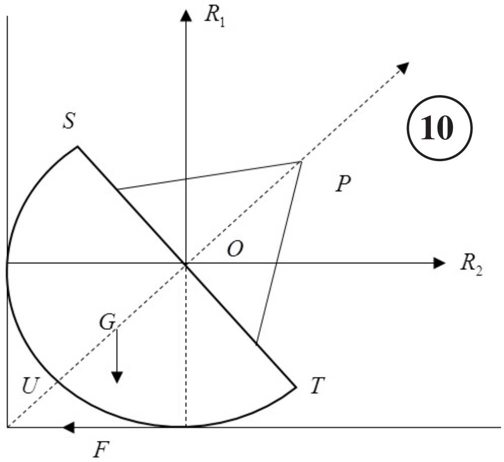
70

L රාමුව සමතුලිතතාවයෙන් දෙන ලද පිහිටුමේ තිබීමට $\overline{x_1} > \frac{a}{2}$ විය යුතුයි. 5

i.e. $\left(\frac{\pi k + 4k + 3}{\pi k + 4}\right)\frac{a}{2} > \frac{a}{2}.$ 5

$\Leftrightarrow \quad \pi k + 4k + 3 > \pi k + 4.$

$\Leftrightarrow \quad k > \frac{1}{4}.$ 5

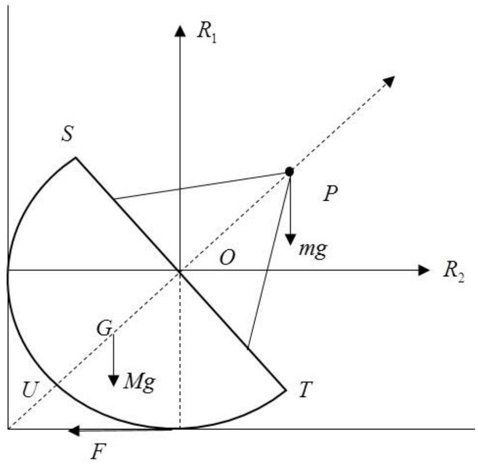


25

$k = 1$ යැයි ගනිමු.

එවිට, $\overline{x_1} = \left(\frac{\pi + 7}{\pi + 4}\right)\frac{a}{2}.$

$\overline{x_2}$ යනු P සිට අලුත් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට ඇති දුර ලෙස ගන්න.



එවිට $\left[(4a\rho + \pi a \ \rho) + m\right]\overline{x_2} = (4a\rho + \pi a \ \rho)\,\overline{x_1}.$ 5

$$\Leftrightarrow \left[(4a\rho + \pi a \ \rho) + m\right]\overline{x_2} = (4a\rho + \pi a \ \rho)\left(\frac{\pi + 7}{\pi + 4}\right)\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[(4a\rho + \pi a \ \rho) + m\right]\overline{x_2} = a\rho(\pi + 7)\frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{x_2} = \frac{a\rho(\pi + 7)}{\left[(4a\rho + \pi a \ \rho) + m\right]}\frac{a}{2}$$ 5

ඉහත පිහිටුමේ සමතුලිතව පිහිටීම $\overline{x_2} > \dfrac{a}{2}$ විය යුතු වේ. 5

i.e. $\dfrac{a\rho(\pi + 7)}{\left[(4a\rho + \pi a \ \rho) + m\right]}\dfrac{a}{2} > \dfrac{a}{2}$

$$\Leftrightarrow a\rho(\pi + 7) > 4a\rho + \pi a \ \rho + m$$

$\Leftrightarrow m < 3a\rho.$ 5

20

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) A, B හා C යන මලු එක එකක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම, සුදු බෝල හා කළු බෝල පමණක් අඩංගු වේ. A මල්ලෙහි සුදු බෝල 4 ක් හා කළු බෝල 2 ක් ද B මල්ලෙහි සුදු බෝල 2 ක් හා කළු බෝල 4 ක් ද C මල්ලෙහි සුදු බෝල m හා කළු බෝල $(m+1)$ ක් ද අඩංගු වේ. මල්ලක් සසම්භාවීව තෝරා ගෙන එකකට පසු ව අනෙක ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව සසම්භාවීව බෝල දෙකක් එම මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. ඉවතට ගත් පළමු බෝලය සුදු හා ඉවතට ගත් දෙවන බෝලය කළු වීමේ සම්භාවිතාව $\dfrac{5}{18}$ වේ. m හි අගය සොයන්න.

තව ද ඉවතට ගත් පළමු බෝලය සුදු හා ඉවතට ගත් දෙවන බෝලය කළු බව දී ඇති විට, C මල්ල තෝරා ගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) ශිෂ්‍යයන් 100 ක කණ්ඩායමක්, සංඛ්‍යාන ප්‍රශ්නයකට ඔවුන්ගේ පිළිතුරු සඳහා ලබා ගත් ලකුණුවල ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙහි දැක්වේ.

ලකුණු පරාසය	ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව
0 - 2	15
2 - 4	25
4 - 6	40
6 - 8	15
8 - 10	5

මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය μ හා සම්මත අපගමනය σ නිමානය කරන්න.

$\kappa = \dfrac{3(\mu - M)}{\sigma}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන කුටිකතා සංගුණකය κ ද නිමානය කරන්න; මෙහි M යනු ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය වේ.

X යනු පළමු බෝලය සුදු සහ දෙවන බෝලය කළු යැයි ගනිමු.

X මුළු සම්භාවිතා නියමයෙන්, 5

$$P(X) = P(X \mid A)\,P(A) + P(X \mid B)\,P(B) + P(X \mid C)\,P(C). \text{ - - - - - - - - - - - - - - - } (1)$$

$$P(X \mid A) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \quad 10$$

$$P(X \mid B) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \quad 10$$

$$P(X \mid C) = \frac{m}{(2m+1)} \cdot \frac{m+1}{2m} = \frac{(m+1)}{2(2m+1)} \quad 10$$

තවද, $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$. 5

$P(X) = \dfrac{5}{18}$, නිසා

$$(1) \Rightarrow \quad \frac{5}{18} = \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{(m+1)}{2(2m+1)} \times \frac{1}{3} \quad 10$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{8}{15} = \frac{(m+1)}{2(2m+1)} \quad 5$$

$$\Rightarrow \quad 3(2m+1) = 5(m+1)$$

$$\Rightarrow \quad m = 2 \quad 5$$

60

$$m = 2 \Rightarrow P(X \mid C) = \frac{3}{10}. \quad 5$$

බේයස් ප්‍රමේයයෙන්,

$$P(C \mid X) = \frac{P(X \mid C)\, P(C)}{P(X)} \quad 5$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{18}} \quad 5$$

$$= \frac{9}{25}. \quad 5$$

20

(*b*)

ලකුණු පරාසය	f	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය x	x^2 (5)	fx (5)	fx^2 (5)
0 - 2	15	1	1	15	15
2 - 4	25	3	9	75	225
4 - 6	40	5	25	200	1000
6 - 8	15	7	49	105	735
8 - 10	5	9	81	45	405
	$\sum f = 100$			$\sum fx = 440$ (5)	$\sum fx^2 = 2380$ (5)

$$\mu = \frac{\sum f x}{\sum f} = \frac{440}{100} = 4.4 \quad 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f x^2}{\sum f} - \mu^2}$$ 5

$$= \sqrt{\frac{2380}{100} - \left(\frac{44}{10}\right)^2}$$ 5

$$= \sqrt{23.8 - 19.36}$$ 5

$$= \sqrt{4.44}$$

$$\approx 2.11.$$ 5

$\boxed{50}$

$$M = 4 + \frac{10}{40} \times 2$$ 5

$$= 4.5.$$ 5

$$\kappa = \frac{3(4.4 - 4.5)}{2.11}$$ 5

$$= -\frac{0.3}{2.11}$$

$$\approx 0.14.$$ 5

$\boxed{20}$
